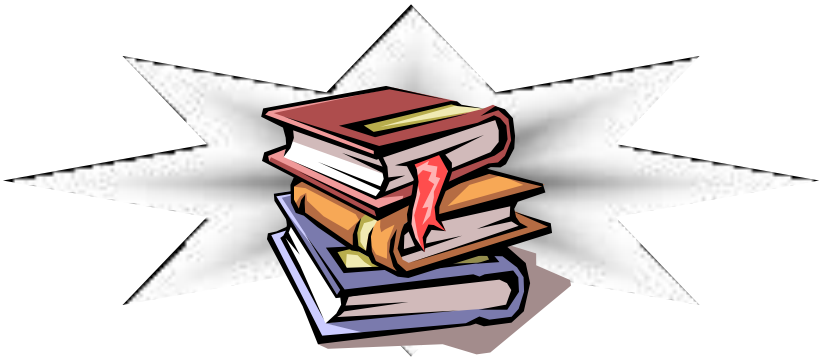
Tailieumontoan.com

Trịnh Bình Tổng hợp



TUYỂN TẬP ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
TOÁN LỚP 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI

Thanh Hóa, tháng 12 năm 2019

TUYỂN TẬP ĐỀ THI
HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh luyện thi học sinh giỏi môn toán lớp 9, website tailieumontoan.com giới thiệu đến thầy cô và các em bộ đề thi học sinh giỏi toán lớp 9 thành phố Hà Nội qua các năm có hướng dẫn một số đề. Đây là bộ đề thi mang tính chất thực tiễn cao, giúp các thầy cô và các em học sinh luyện thi học sinh giỏi lớp 9 có một tài liệu bám sát đề thi để đạt được thành tích cao, mang lại vinh dự cho bản thân, gia đình và nhà trường. Bộ đề gồm nhiều Câu toán hay được các thầy cô trên cả nước sưu tầm và sáng tác, ôn luyện qua sẽ giúp các em phát triển tư duy môn toán từ đó thêm yêu thích và học giỏi môn học này, tạo được nền tảng để có những kiến thức nền tốt đáp ứng cho việc tiếp nhận kiến thức ở các lớp, cấp học trên được nhẹ nhàng và hiệu quả hơn.

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng có thể dùng tuyển tập đề toán này để giúp con em mình học tập. Hy vọng Tuyển tập đề thi học sinh giỏi lớp 9 thành phố Hà Nội này sẽ có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Bộ đề này được viết theo hình thức Bộ đề ôn thi, gồm: đề thi và hướng dẫn giải đề ngay dưới đề thi đó dựa trên các đề thi chính thức đã từng được sử dụng trong các kì thi học sinh giỏi toán lớp 9 của thành phố Hà Nội.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ bộ đề này!

MỤC LỤC

Phần 1: Đề thi

Phần 2: Hướng dẫn giải

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 1

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

b) Cho $S=\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)...\left(1-\frac{2}{2020.2021}\right)$ là một tích của 2019 thừa số. Tính S (kết quả để dưới dạng phân số tối giản).

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Biết $a;b$ là các số nguyên dương thỏa mãn a^2-ab+b^2 chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho 9^n+11 là tích của k $(k\in\mathbb{N},k\geq 2)$ số tự nhiên liên tiếp.

Câu 3: *(3,0 điểm)*

a) Cho $x;y;z$ là các số thực dương nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng trong các số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y},\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z},\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Với các số thực dương a,b,c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+2abc=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+ca-abc$.

Câu 3: *(6,0 điểm)* Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F. Gọi S là giao điểm của AI và DE.

a) Chứng minh rằng tam giác IAB đồng dạng với tam giác EAS.

b) Gọi K là trung điểm của AB và O là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm K,O,S thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của KI và AC. Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N. Chứng minh rằng $AM=AN$.

Câu 4: *(1,0 điểm)* Xét bảng ô vuông cỡ 10×10 gồm 100 hình vuông có cạnh 1 đơn vị. Người ta điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên tùy ý sao cho hiệu hai số được điền ở hai ô chung cạnh bất kỳ đều có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên xuất hiện trong bảng ít nhất 6 lần.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 2

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017 – 2018
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: *(5,0 điểm)*

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn a + b + c = 2018 và $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=\frac{2017}{2018}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.

b) Tìm tất các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình:

$$\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}=\frac{7}{13}.$$

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $6x^2+2x+1=3x\sqrt{6x+3}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+x+2=y^3-3y^2+4y \\ 2\sqrt{x+2}=y+2. \end{cases}$

Câu 3: *(3,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng không tồn tại các số dương *m, n, p* với *p* nguyên tố thỏa mãn:

$$m^{2019}+n^{2019}=p^{2018}$$

b) Cho x, y, z thỏa mãn x + y + z = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{y^3+16}+\frac{y}{z^3+16}+\frac{z}{x^3+16}.$$

Câu 4: *(6,0 điểm)* Cho tam giác ABC có ba góc nhọn AB < AC < BC, nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là hình chiếu của A trên BC, M là trung điểm của AC và P lầ điểm thay đổ trên đoạn thẳng MH *(P khác M và P khác H).*

a) Chứng minh rằng $\angle BAO=\angle HAC$.
b) Khi $\angle APB=90^o$ chứng minh ba điểm B, O, P thẳng hàng.
c) Đường tròn ngoại tiếp AMP và đường tròn ngoại tiếp tam giác BHP cắt nhau tại Q *(Q khác P)*. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

Câu 3: *(3,0 điểm)* Cho đa giác đều *2n* đỉnh nội tiếp đường tròn *(O)*. Chia *2n* đỉnh này thành *n* cặp điểm, mỗi cặp điểm này tạo thành một đoạn thẳng (hai đoạn thẳng bất kỳ trong số *n* đoạn thẳng được tạo ra không có đầu mút chung).

a) Khi *n = 4*, hãy chỉ ra một cách chia sao cho trong bốn đoạn thẳng được tạo ra không có hai đoạn thẳng nào có độ dài bằng nhau.
b) Khi *n = 10*, chứng minh rằng trong mười đoạn thẳng được tạo ra luôn tồn tại hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 3

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016 – 2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1 *(5.0 điểm).*

a) Chứng minh rằng $n^5 + 5n^3 - 6n$ chia hết cho 30 với mọi số nguyên dương n.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^2 + 8y$ và $y^2 + 8x$ đều là số chính phương.

Bài 2 *(5.0 điểm).*

a) Giải phương trình $\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} = 1 + \frac{3}{2x}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\frac{4x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\frac{5y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \end{cases}$

Bài 3 *(3.0 điểm).*

Với mọi số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

a) Chứng minh rằng $x + y + z \le 2 + xy$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2+yz} + \frac{y}{2+zx} + \frac{z}{2+xy}$.

Bài 4 *(6.0 điểm).*

Cho tam giác ABC (BC > CA > AB) nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC cắt tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$ tại điểm thứ hai là M. Gọi P là trực tâm của tam giác BMC.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, P cùng huộc một đường tròn.

b) Đường thẳng qua H song song với AO cắt cạnh BC tại E. Gọi F là điểm trên cạnh BC sao cho CF = BE. Chứng minh ba điểm A, F, O thẳng hàng.

c) Gọi N là tam đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM. Chứng minh rằng $PN = PO$

Bài 5 *(1.0 điểm).*

Trên bàn có 100 thẻ được đánh số từ 1 đến 100.Hai người A và B lần lượt chọn lấy một tẩm thẻ trên bàn sao cho nếu người A lấy tấm thẻ đánh số n thì đảm bảo người B chọn được tấm thẻ đánh số $2n + 2$. Hỏi người A có thể lấy được nhiều nhất bào nhiêu tấm thẻ trên bàn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 4

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(5.0 điểm).*

a) Cho các nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 = 2\left(c^3 - 8d^3\right)$.

Chứng minh rằng a + b + c + d chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho $2^x + x^2$ là số nguyên tố.

Câu 2. *(5.0 điểm).*

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 11x + 19} + \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 3\left(x + 2\right)$

b) Tìm tất cả các bộ ba số $\left(x; y; z\right)$ thỏa mãn $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 17 \end{cases}$

Câu 3. *(3.0 điểm).*

a) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $0 < x, y, z < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $xy + yz + zx = \dfrac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4x}{3 - 4x^2} + \frac{4y}{3 - 4y^2} + \frac{4z}{3 - 4z^2}$$

b) Cho a, b, c là đồ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^{2016}}{b + c - a} + \frac{b^{2016}}{c + a - b} + \frac{c^{2016}}{a + b - c} \ge a^{2015} + b^{2015} + c^{2015}$$

Câu 4. *(6.0 điểm).*

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Lấy điểm Q bất kì trên cạnh BC (Q khác B và C). Trên tia đối của tia BA lấy điểm P sao cho $CQ.AP = a^2$. Gọi M là giao điểm của AQ và CP.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA.

1. Xác định vị trí của Q để IK có độ dài lớn nhất.
2. Chứng minh $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC.

Câu 5. *(1.0 điểm).*

Cho bảng ô vuông kích thước 10.10 gồm 100 ô vuông có kích thước 1x1. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 4

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014– 2015
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: *(5,0 điểm)*

a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn abc = 1 và $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Chứng minh rằng ít nhất một trong ba số a, b, c bằng 1

b) Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng $A=2^{3n+1}+2^{3n-1}+1$ là hợp số

Bài 2: *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x\sqrt{3-2x}=3x^2-6x+4$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \\ x^2+8y^2=12 \end{cases}$

Bài 3: *(2,0 điểm)*

Cho a, b, c > 0 thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3.$

Tìm giá trị lớn nhất của: $P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}$

Bài 4: *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H

a) Chứng minh rằng: $\cos^2\widehat{BAC}+\cos^2\widehat{CBA}+\cos^2\widehat{ACB}<1$

b) P là điểm thuộc cung nhỏ AC của đường tròn (O). Gọi M, I lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC và HP. Chứng minh rằng MI vuông góc với AP

Bài 5: *(2,0 điểm)*

a) Tìm các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2-p-2}{2}$ là lập phương của một số tự nhiên

b) Cho 5 số thực không âm a, b, c, d, e có tổng bằng 1. Xếp 5 số này trên một đường tròn. Chứng minh rằng luôn tồn tại một cách xếp sao cho hai số bất kì cạnh nhau có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{9}$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 5

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2013– 2014
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: *(5,0 điểm)*

a) Cho các số thực khác 0 thỏa mãn a + b + c = 2014 và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2014}$

Tính giá trị $M=\frac{1}{a^{2013}}+\frac{1}{b^{2013}}+\frac{1}{c^{2013}}$

b) Tìm số tự nhiên n để $25^{n^2-3n+1}-12$ là số nguyên tố

Bài 2: *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình $x^2-2x-2\sqrt{2x+1}-2=0$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=4x-5+2xy \\ x^4+y^4=9z-5-4z^2-2x^2y^2 \end{cases}$

Bài 3: *(2,0 điểm)* Cho các số thực a, b, c thỏa mãn a + b + c = 6 và $0\le a,b,c\le 4$

Tìm giá trị lớn nhất của $P=a^2+b^2+c^2+ab+ac+ca$

Bài 6: *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ***ABC*** nhọn nội tiếp *(O)*. Gọi điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, tia AI cắt đường tròn (O) tại M (điểm M khác điểm A).

a) Chứng minh các tam giác IMB và IMC là các tam giác cân.

b) Đường thẳng MO cắt đường tròn tại điểm N (N khác điểm M) và cắt cạnh BC tại điểm P. Chứng minh rằng: $\sin\frac{\widehat{BAC}}{2}=\frac{IP}{IN}$.

c) Gọi các điểm D, E lần lượt là hình chiếu của điểm I trên các cạnh AB, AC. Gọi các điểm H, K lần lượt đối xứng với các điểm D, E qua điểm I. Biết rằng AB + AC = 3BC, chứng minh các điểm B, C, H, K cùng thuộc một đường tròn.

Bài 5: *(2,0 điểm)* 1) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $5^x-2^y=1$.

2) Cho lục giác đều ABCDEF cạnh có độ dài bằng 1 và P là điểm nằm trong lục giác đó. Các tia AP, BP, CP, DP, EP, CF cắt các cạnh của lục giác này lần lượt tại các điểm M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 (các điểm này lần lượt khác các điểm A, B, C, D, E, F). Chứng minh lục giác $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ có ít nhất một cạnh có độ dài lớn hơn hoặc bằng 1.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 6

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012– 2013
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(5 điểm)*

a) Tìm các sso thực a, b sao cho đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$.

b) Cho biểu thức $P = \left(a^{2013} - 8a^{2012} + 11a^{2011}\right) + \left(b^{2013} - 8b^{2012} + 11b^{2011}\right)$

Tính giá trị của P với $a = 4 + \sqrt{5}$ và $b = 4 - \sqrt{5}$.

Câu 2. *(5 điểm)*

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2 - y^2 - xy + 5x + 5y - 6 = 0 \\ 20x^2 - y^2 - 28x + 9 = 0 \end{cases}$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $6x^2 + 10y^2 + 2xy - x - 28y + 18 = 0$

Câu 3. *(2 điểm)* Cho ba số thực a, b, c dương thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 3.$. Chứng minh:

$$\frac{27a^2}{c\left(c^2 + 9a^2\right)} + \frac{b^2}{a\left(4a^2 + b^2\right)} + \frac{8c^2}{b\left(9b^2 + 4c^2\right)} \geq \frac{3}{2}$$

Câu 4. *(7 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và AB < AC. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi I là giao ddiemr của hai đường thẳng EF và CB. Đường thẳng AI cắt (O) tại M (M khác A).

a) Chứng minh năm điểm A, M, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi N là trung điểm của BC. Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

c) Chứng minh BM. AC + AM.BC = AB. MC.

Câu 5 *(1 điểm)*

Cho 2013 điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2013}$ và đường tròn (O; 1) tùy ý cùng nằm trong mặt phẳng. Chứng minh trên đường tròn (O; 1) đó, ta luôn có thể tìm đường một điểm M sao cho $MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_{2013} \geq 2013$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 7

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2011– 2012
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(5 điểm)*

1) Cho biểu thức $A=\left(a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}\right)-\left(a^{2008}+b^{2008}+c^{2008}\right)$ với a,b,c là các số nguyên dương. Chứng minh A chia hết cho 30.
2) Cho $f\left(x\right)=\left(2x^3-21x-29\right)^{2012}$.

   Tính f(x) tại $x=\sqrt[3]{7+\sqrt{\frac{49}{8}}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{\frac{49}{8}}}$

Câu 2. *(5 điểm)*

1) Giải phương trình: $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$
2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+x-y-2y^2=0 \\ x^2-y^2+x+y=6 \end{cases}$

Câu 3. *(2 điểm)* Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn:

$$2x^2+3y^2-5xy-x+3y-4=0$$

Câu 4. *(4 điểm)* Cho A là điểm thuộc nửa đường tròn tâm O đường kính BC (A không trùng với B, C). Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

1) Chứng minh AO ⊥ MN.
2) Cho AH = $\sqrt{2}cm$, BC = $\sqrt{7}cm$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNC.

Câu 5. *(4 điểm)*

1) Gọi h_1, h_2, h_3, r lần lượt là độ dài các đường cao và bán kính đường tròn nội tiếp của một tam giác. Chứng minh rằng tam giác đó là tam giác đều khi và chỉ khi:
$$\frac{1}{h_1+2h_2}+\frac{1}{h_2+2h_3}+\frac{1}{h_3+2h_1}=\frac{1}{3r}$$
2) Trong mặt phẳng cho 8045 điểm mà diện tích của mọi tam giác với các đỉnh là các điểm đã cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho có thể tìm được 2012 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 8

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2010– 2011
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. *(2 điểm)* Rút gọn biểu thức : $A = \dfrac{\sqrt{4x^3 - 16x^2 + 21x - 9}}{\sqrt{x-1}}$

Bài 2. *(5 điểm)*

1, Giải phương trình: $2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$

2, Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn: $4x^2 - (8y + 11)x + (8y^2 + 14) = 0$

Tìm y khi x lẫn lượt đạt được giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. *(5điểm)*

1, Tìm 7 số nguyên dương sao cho tích các bình phương của chúng bằng 2 lần tổng các bình phương của chúng.

2, Cho các số thức không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $B = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$

Bài 4. *(6 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC.

1, Vẽ về phía ngoài tam giác ABC nửa đường tròn (I) đường kính AB và nửa đường tròn (K) đường kính AC. Đường thẳng qua A cắt hai nửa đường tròn (I), (K) lần lượt tại các điểm M, N(M khác A, B và N khác A,C)

Tính các góc của tam giác ABC khi diện tích tam giác CNA bằng 3 lần diện tích tam giác AMB

2, Cho AB < AC và điểm D thuộc cạnh AC sao cho AD = AB. Gọi E là hình chiếu của điểm D trên đường thẳng BC và điểm F là hình chiếu điểm A trên đường thẳng DE.

So sánh $\dfrac{AF}{AB}$ và $\dfrac{AF}{AC}$ với $\cos A\hat{E}B$

Bài 5. *(2 điểm)*

Hai người chơi trò chơi như sau: trong hộp có 311 viên bi, lần lượt từng người lấy k viên bi, với $k \in \{1, 2, 3\}$. Người thắng là người lấy được viên bi cuối cùng trong hộp bi đó.

1, Hỏi người thứ nhất hay người thứ 2 thắng và chiến thuật chơi thế nào để thắng?

2, Cũng hỏi như câu trên, khi đề bài thay 311 viên bi bằng n viên bi, với n là số nguyên dương?

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 9

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2009– 2010
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (4 điểm)

Tính giá trị biểu thức: $A=\left(x^{31}+x^{3}-x^{2010}\right)^{2009}$ với $x=\dfrac{\left[3\left(2+\sqrt{5}\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}\right]}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$

Câu 2. *(4 điểm)*

a. Giải phương trình $x^4+3x^3-2x^2-6x+4=0$

b. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} xy+x+y=a+1 \\ x^2y+xy^2=a \end{cases}$

Câu 3. (4 điểm)

a. Giải bất phương trình:

$$\frac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1}\le 0$$

b. Tìm giá trị lớn nhất của: $B=\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+\dfrac{1}{z^3+x^3+1}$

Với x, y, z là các số dương và xyz = 1

Câu4. (6 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). D là một điểm bất kì thuộc cung nhỏ AC(D khác A và C). Gọi M,N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D tới các đường thẳng AB, AC. Gọi P là giao điểm các đường thẳng MN,BC.

1) Chứng minh DP và BC vuông góc với nhau
2) Đường tròn (I; r) nội tiếp tam giác ABC. Tính IO với R = 5cm, r =1,6 cm.

Bài 5. (2 điểm) Tìm x,y nguyên dương để C là một số nguyên dương với

$$C=\frac{x^3+x}{xy-1}$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 10

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2008– 2009
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 *(4 điểm)*

1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a ta đều có $\left(a^3+5a\right)$ là số nguyên chia hết cho 6.

2) Cho $A=27309^{10}+27309^{10^2}+27309^{10^3}+...+27309^{10^{10}}$. Tìm số dư trong phép chia A cho 7.

Câu 2 *(4 điểm)*

1) Chứng minh $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$, với x > 0, y > 0. Xảy ra đẳng thức khi nào?

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P, biết

$P=\frac{2}{a^2+b^2}+\frac{35}{ab}+2ab,$ với a > 0, b > 0 và $a+b\le 4$

Câu 3 *(4 điểm)*

Cho phương trình x + m – 1 = m$\sqrt[3]{2x-1}$ (với x là ẩn số).

1) Giải phương trình khi m = 3.

2) Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có nghiệm lớn hơn 1?

Câu 4 *(4 điểm)*

Cho đường tròn (O; 3) và điểm A cố định (A khác O). Chứng minh:

1) Nếu HK là đường kính của đường tròn (O; 3) thì AH ≥ 3 hoặc AK ≥ 3.

2) Tồn tại hình thang cân MNPQ nội tiếp đường tròn (O; 3) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện MA + NA + PA + QA > 12 và MN + NP + PQ + QM < 12.

Câu 5 *(4 điểm)*

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R và C là điểm chính giưa của cung AB. Lấy điểm M tùy ý trên cung BC (M khác B). Gọi N là giao điểm của hai tia OC và BM; H, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AO, AM; K là giao điểm của đường thẳng BM và HI.

1) Chứng minh các điểm A, H, K và N cùng nằm trên một đường tròn.

Xác định vị trí của điểm M trên cung BC (M khác B) sao cho $AK=\frac{R\sqrt{10}}{2}$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 11

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2007– 2008
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (4 điểm)

a. Tìm số nguyên p thoả mãn: (p + 4), (p + 8) cũng là các số nguyên số
b. Tìm số hữu tỉ a thoả mãn: 2a + 5a là số tự nhiên và là số chính phương

Câu 2. (4 điểm)

Cho $x \geq 1$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2 - 5x + 7}$$

Câu 3. *(4 điểm)*

Cho phương trình $2x^2 - 2(2+m)x + 8 - 4m = 3\sqrt{x^3 + 8}$

với x là ẩn số

a. Giải phương trình khi m=1
b. Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm

Câu 4. *(4 điểm)*

Cho đa giác đều 91 đỉnh mỗi đỉnh của đa giác. Mỗi đỉnh của đa giác được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh luôn tìm được 3 đỉnh trong 91 đỉnh của đa giác thoả mãn: 3 đỉnh này cùng màu và 3 đỉnh của một tam giác cân có ít nhất một góc nhỏ hơn 60^0.

Câu 5. *(4 điểm)*

Cho đường tròn (O′,R) và dây BC cố định (BC < 2R) . A là điểm di chuyển trên cung lớn BC (A khác B,C). Gọi M là trung điểm của đoạn AC, H là hình chiếu vuông góc của M trên AB. Xác định vị trí của điểm A trên cung lớn BC để đoạn CH có độ dài lớn nhất.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 12

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2006– 2007
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4 điểm)*

Cho x, y là các số thỏa mãn x + y = 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x^3 + y^3 + 2xy$$

Câu 2. *(4 điểm)*

a, Cho p là số tự nhiên khác 0. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 + 5px - 1 = 0$$

x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 4px - 1 = 0$

Chứng minh rằng tích: $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4)$

là một số chính phương

b, Tìm số tự nhiên m thỏa mãn đồng thời các điều kiện 9000 < m < 10000, m chia cho 95 dư 25 và m chia cho 97 dư 11

Câu 3. *(4 điểm)*

a, Tìm các số a, b để phương trình

$$(x - 1)(x - a) + 1 = (x - 2)(x + b)$$

có ít nhất 3 nghiệm x = 30, x =3 và x = 2007

b, Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - \frac{1}{4x}} + \sqrt{x - \frac{1}{4x}} = x \text{ , với điều kiện } \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

Câu 4. *(4 điểm)*

Trong mặt phẳng cho 19 điểm phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và nằm trong hình chữ nhật kích thước 2x3. Chứng minh rằng trong 19 điểm đã cho có 3 điểm nằm trong hình tròn bán kính $\frac{3}{4}$ và tạo thành một tam giác có ít nhất một góc không vượt quá 45°

Câu 5. *(4 điểm)*

Trong đường tròn (O, R), cho dây AB cố định (AB < 2R) và C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Gọi M là điểm tùy ý trên cung lớn AM với dây AB.

a, Chứng minh tích CM.CN có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí của M

b, Xác định vị trí của điểm M trên cung lớn AB sao cho $AM - BM = \frac{1}{3}AB$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 13

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2005– 2006
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4 điểm)*

a. Cho năm chữ số 1,3,5,7,9. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được thành lập từ năm chữ số đã cho?

b. Chứng minh tồn tại số tự nhiên n khác không thoả mãn $\left(13579^n - 1\right)$ chia hết cho 3^{13579}

Câu 2. *(4 điểm)*

Cho phương trình $x^2 - mx - 4 = 0$ (x là ẩn số)

a. chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{2\left(x_1 + x_2\right) + 7}{x_1^2 + x_2^2}$

b. Tìm các giá trị của m sao cho hai nghiệm của phương trình đều là số nguyên

Câu 3. *(4 điểm)* Giải phương trình $x^2 - 1 = 3\sqrt{3x+1}$

Câu 4. *(4 điểm)*

Trong mỗi ô của bảng vuông 3x3 ta điền các dấu + hoặc - để được bảng như sau trong hình 1

+	-	+
-	+	+
+	-	-

Hình 1

-	+	-
+	-	+
-	+	+

Hình 2

Ta thực hiện phép biến đổi:
"Đổi ngược dấu của tất cả các ô trong cùng một dòng hoặc trong cùng một cột".
Hỏi sau một số hữu hạn lần áp dụng phép biến đổi trên ta có thể thu được bảng trong hình 2 không? Tại sao?

Câu 5. *(4 điểm)*

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2 và điểm C là điểm của cung AB. gọi M là điểm tuỳ ý trên cung BC (M ≠ B,C). Kẻ dây BK song song với CM. Đường tròn đường kính MK cắt tia BM tại điểm thứ hai là S. xác định vị trí của điểm M sao cho khoảng cách từ điểm S đến AB là lớn nhất và tính khoảng cách lớn nhất đó.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 14

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2004– 2005
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4 điểm)*

a. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số mà chữ số hàng đơn vị là 4?
b. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số thoả mãn có chữ số hàng đơn vị là 4 và chi hết cho 3?

Câu 2. *(4 điểm)*

Cho a, b là các số thoả mãn 0 < a < 3, 0 < b < 4. Tìm gái trị nhỏ nhất của tổng:

$$A=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(3-a)^2+(4-b)^2}$$

Câu 3. *(4 điểm)*

Cho phương trình $\left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x-2-m\right)+m=0$

a. với giá trị nào của m thì $x=1+\sqrt{5}$ là nghiệm của phương trình đã cho?
b. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình trên có 4 nghiệm phân biệt và xác định các nghiệm đó.

Câu 4. *(4 điểm)*

Cho 53 số nguyên dương phân biệt có tổng không lớn hơn 2004. Chứng minh rằng luôn tìm được 6 số trong 53 số đã cho thoả mãn: 6 ố này chia được thành 3 cặp số , mà mỗi cặp đều có tổng bằng 53.

Câu 5. *(4 điểm)*

Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A}=90^o$). Nội tiếp trong đường tròn (O). M là một điểm tuỳ ý thuộc đường tròn ($M\neq A,B,C$). Gọi I là trung điểm của đoạn AM và h là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng CM . Hãy xác định vị trí của M sao cho tam giác ACH có diện tích lớn nhất.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 15

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2003– 2004
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng $\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{4-2\sqrt{3}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}}}$ là số tự nhiên

b) Cho số $S=\frac{1}{3\left(1+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{5\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+\frac{1}{7\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)}+...+\frac{1}{97\left(\sqrt{48}+\sqrt{49}\right)}$.

So sánh S với $\frac{3}{7}$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

Cho bốn số x, y, z, t có tổng bằng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\frac{(x+y+z)(x+y)}{xyzt}.$$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

Giải phương trình: $x^2-2(x+1)\sqrt{x^2-1}-3x^2+6x-1=0.$

Câu 4. *(4,0 điểm)*

Cho 100 điểm phân biệt và một đường tròn (O) cố định có bán kính 1 cm. Chứng minh rằng tồn tại một đa giác 2004 đỉnh nội tiếp đường tròn (O) sao cho: Tổng các khoảng từ mỗi đỉnh đa giác đó đến 100 điểm đã cho đều không nhỏ hơn 100 cm.

Câu 5. *(4,0 điểm)*

Cho nữa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R, một dây MN = R di chuyển trên nữa đường tròn. Qua M kẻ đường thẳng song song với ON, đường thẳng này cắt đường thẳng AB tại E. Qua N kể đường thẳng song song với OM, đường thẳng này cắt đưởng thẳng AB tại F.

a) Chứng minh hai tam giác MNE và NFM đồng dạng;
b) Gọi I là giao điểm của EN và FM. Hãy xác định vị trí của dây MN để tam giác MIN có chu vi lớn nhất.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 16

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2002– 2003
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a) Nếu viết liên tiếp 9999 số 2003 ta được số mới A = 20032003...2003.
Hãy tìm số dư trong phép chia số A cho 9999.

b) Cho a, b là các số tự nhiên khác) và $\left(a^2+b^2\right)\vdots ab$.

Hãy tính gía trị của biểu thức: $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+\sqrt{4x^2-1}}+\sqrt{2x-\sqrt{4x^2-1}}=2$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:
$\sqrt{2x+\sqrt{4x^2-1}}+\sqrt{2x-\sqrt{4x^2-1}}=4x^2-2x+2+m^2$.

Hãy tính nghiệm của phương trình trong trường hợp có nghiệm.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

Cho 0 < x < 2. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A=\dfrac{2}{2-x}+\dfrac{1}{x}$.

Câu 4. *(4,0 điểm)*

Cho 10 điểm phân biệt, không có ba điểm nào thẳng hàng và nằm trong một tam giác đều có cạnh là 2 cm. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 điểm trong 10 điểm đã cho, 3 điểm này lập thành một tam giác thỏa mãn đồng thời các đều kiện sau: Là tam giác có diện tích không vượt quá $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm² và có ít nhất một góc nhỏ nhỏ hơn hoặc bằng 45°.

Câu 5. *(4,0 điểm)*

Cho đường tròn (O; R) và một dây AB cố định, AB = R$\sqrt{3}$. Gọi P là điểm chính giữa cung nhỏ AB. Đường thẳng d quay quanh P nhưng luôn cắt đoạn AB tại điểm N (N ≠ A, B) và cắt (O) tại điểm thứ hai là M. Gọi I là điểm nằm trên đoạn thẳng BM sao cho $BI=\dfrac{1}{3}BM$.

a) Chứng minh rằng AP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

b) Hãy dựng đường thẳng d sao cho tổng các khoảng cách từ điểm I đến hai đường thẳng AO và AP là nhỏ nhất.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 17

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2001– 2002
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. *(4,0 điểm)*

a) Gọi A là tích 2002 số tự nhien liên tiếp khác 0 đầu tiên. Ta chia A lần lượt cho 1; 2; 3;...; 2002 được các thương tương ứng là A_1; A_2; .....;A_{2002}. Chứng minh rằng tổng ($A_1 + A_2 + ...+ A_{2002}$) chia hết cho 2003.

b) Cho n là số tự nhiên khác 0 và p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh trong hai số ($p^n + 1$) và ($2p^n + 1$) có ít nhất một số là hợp số.

Bài 2. *(4,0 điểm)*

Cho phương trình: $x^2+(a-2b-2)x+(a-2b-7)=0$

Trong đó $a \geq 3$ và $b \leq 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất mà nghiệm của phương trình có thể đạt được.

Bài 3. *(4,0 điểm)*

Giải phương trình $x+1=\sqrt{2(x+1)+2\sqrt{2(x+1)+2\sqrt{4(x+1)}}}$

Bài 4. *(4,0 điểm)*

Trong hình chữ nhật kích thước 7 cm × 10 cm,ta đặt 7 điểm khác nhau một cách hú họa. Chứng minh rằng luôn tìm được 2 điểm trong 7 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn 5 cm.

Bài 5. *(4,0 điểm)*

Dựng một tam giác thỏa mãn hai điều kiện: Độ dài hai trung tuyến là m, n và diện tích tam giác là lớn nhất.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 18

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2000– 2001
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. *(4,0 điểm)*

Cho 2000 số $a_1, a_2, ..., a_{2000}$ lớn hơn -1 và có tổng là 2. Chứng minh:

$$\sqrt{a_1+1}+\sqrt{a_2+1}+...+\sqrt{a_{2000}+1}\le 2001.$$

Hỏi đẳng thức có xảy ra không, vì sao?

Bài 2. *(4,0 điểm)*

1) Hãy tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $1^n+2^n+3^n+4^n \vdots 5$

2) Chứng minh rằng trong 5 số nguyên bất kì bao giờ cũng tìm được 3 số có tổng chia hết cho 3.

Bài 3. *(4,0 điểm)*

Cho phương trình: $8x^2+10x+3=\dfrac{m}{4x^2+7x+3}$

1) Giải phương trình khi m = 1.

2) Tìm giá trị của m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 4. *(4,0 điểm)*

Cho hình chữ nhật có cạnh là 2m, 3m và 9 đường thẳng phân biệt thỏa mãn: mỗi đường thẳng đều chia tư giác thành hai phần có tỉ lệ là 1 : 2. Chứng minh rằng tồn tại 2 đường thẳng trong số 9 đường thẳng đã cho có tính chất: cùng tạo với một cạnh của hình chữ nhật tạo thành tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{2}$ m^2.

Bài 5. *(4,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A và điểm M tùy ý nằm miền trong tam giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, AC, BC. Hãy xác định M để tổng:

$$MD^2+ME^2+MF^2$$

Có giá trị nhỏ nhất.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 19

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 1999– 2000
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. *(4,0 điểm)*

a) Viết liên tiếp 2000 số 1999 ta được số: A = 19991999…1999
Hãy tìm số dư của A cho 10001.

b) Với n là số tự nhiên cho trước, xét hai số:
$A = 2^{2n+1} + 2^{n+1}$; $B = 2^{2n+1} - 2^{n+1}$

Chứng minh rằng trong hai số A, B có một số chia 5 dư 4 và một số chia cho 5 dư khác 4.

Bài 2. *(4,0 điểm)*

Cho x, y là số nguyên dương thỏa mãn x + y = 1999. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của xy.

Bài 3. *(4,0 điểm)*

Cho phương trình: $\left(x^2 - 2x + 1\right)\left(x^2 - 2x\right) - m\left(x^2 - 2x\right) + 2 = 0$

a) Giải phương trình khi m = -2.

b) Tìm giá trị của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

Bài 4. *(4,0 điểm)*

Cho 9 điểm khác nhau trên một đường tròn. Ta tô màu 9 điểm đó một cách hú họa để được 5 điểm màu đỏ, 4 điểm màu xanh. Sau đó ta thực hiện liên tiếp các phép biến đổi sau:

"giữa hai điểm liền nhau ta xác định điểm mới, điểm này được tô mầu đỏ nấu hai điểm này cùng mầu, và được tô màu xanh nếu hai điểm liền nhau khác mầu".

Hỏi sau một số hữu hạn lần biến đổi trên ta có thu được ta có thể thu được kết quả các điểm toàn mầu đỏ không, tại sao?

Bài 5. *(4,0 điểm)*

Cho ΔABC có $\angle A > 1v, AC > AB$ và AH là đường cao. Trong góc A dựng các đoạn $AD \perp AB$ và $AD = AB$; $AE \perp AC$ và AE = AC. Gọi M là trung điểm của DE.

a) Tính độ dài AM theo các cạnh của tam giác ABC

b) Chứng minh A, H, M thẳng hàng

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 20

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 1998– 1999
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. *(4,0 điểm)*

Cho $x=\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}.$

Tính giá trị biểu thức: $A=\dfrac{x^4-4x^2+3}{x^{1999}}$

Bài 2. *(4,0 điểm)*

Cho ba số dương a, b, c. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

Bài 3. *(4,0 điểm)*

Cho phương trình $x^2+5(m^2+1)x+1=0$ với m là số nguyên.

a) Chứng minh phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 và $S_n=x_1^n+x_2^n$ là số nguyên với mọi số nguyên n.

b) Tìm số dư trong phép chia S_{1999} cho 5.

Bài 4. *(4,0 điểm)*

Một dãy nhà được đánh số theo nguyên tắc cùng chẵn hoặc cùng lẻ.Biết rằng tổng các số chỉ số của dãy nhà là 1325, hãy xác định số nhà thứ 13 kể từ đầu dãy.

Bài 5. *(4,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn. Lấy điểm D trên cung BC (không chứa điểm A). Gọi H, I, K theo thứ tự là các hình chiếu của D trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

1) $\dfrac{BC}{DH}=\dfrac{AC}{DI}+\dfrac{AB}{DK}$

2) H, I, K thẳng hàng

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 21

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 1997– 1998
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. *(4,0 điểm)*

1) Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 là một số chính phương.
2) Tìm tất cả số tự nhiên a, b sao cho $A = a^4 + 4b^4$ là số nguyên tố.

Bài 2. *(3,0 điểm)*

Cho các số a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 + 9 = 6a + 4b$. Chứng minh rằng:

$$7 \le 3a + 4b \le 27$$

Khi nào đẳng thức xảy ra.

Bài 3. *(5,0 điểm)*

Cho hệ $\begin{cases} x^2 + x \le x|a+1| + 3 \\ x^4 + 3x^3 + (a^2 - 2)x^2 - 3x + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$

1) Giải hệ với a = -3.
2) Tìm giá trị của a để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 4. *(3,0 điểm)*

Trên mặt phẳng cho 17 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tất cả điểm được nối với nhau từng cặp bằng các đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng đó được to 1 trong 3 màu: xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng luôn tìm được một tam giác có các cạnh cùng màu.

Bài 5. *(4,0 điểm)*

Cho 2 đường tròn (O_1; R_1) và (O_2; R_2) cắt nhau tại 2 điểm A, B ($R_1 < R_2$). Hãy xác định điểm I sao cho mọi đường tròn đi qua A và I đều cắt hai đường tròn đã cho tại giao điểm thứ hai cách điều I.

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ SỐ 1 (2018-2019)

Câu 1:

a) Phương trình: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$ (*)

ĐKXĐ: $x\ge 1$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{2-x} \\ b=\sqrt{x-1} \end{cases}$ với $a\le 1,\ b\ge 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} a^3=2-x \\ b^2=x-1 \end{cases} \Rightarrow a^3+b^2=1.$

Từ $(*)$ ta có: $a=1-b \Rightarrow b=1-a$.

Thay $b=1-a$ vào thệ thức $a^3+b^2=1\Rightarrow$ $a^3+(1-a)^2=1$ $\Leftrightarrow a^3+a^2-2a+1=1$ $\Leftrightarrow a^3+a^2-2a=0$ $\Leftrightarrow a(a^2+a-2)=0$ $\Leftrightarrow a(a+2)(a-1)=0$.

* Nếu $a=0$ (Thỏa mãn) $\Rightarrow b=1$. Ta được $\begin{cases} 2-x=0 \\ x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

* Nếu $a+2=0 \Leftrightarrow a=-2$ $\Rightarrow b=3$. Ta được $\begin{cases} 2-x=-8 \\ x-1=9 \end{cases} \Leftrightarrow x=10$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

* Nếu $a-1=0$ $\Leftrightarrow a=1$ $\Rightarrow b=0$. Ta được $\begin{cases} 2-x=1 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{1;2;10\}$.

b) $S=\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)...\left(1-\frac{2}{2020.2021}\right)$.

Với $n\in\mathbb{N}$ ta có: $1-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n^2+n-2}{n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$.

Áp dụng kết quả trên ta có:

$$S=\frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}...\frac{2019.2022}{2020.2021}=\frac{(1.2.3...2019).(4.5.6...2022)}{(2.3.4...2020).(3.4.5...2021)}=\frac{1.2022}{2020.3}=\frac{337}{1010}.$$

Vậy $S=\frac{337}{1010}$.

Câu 2:

a) Ta có: $\left(a^2+ab+b^2\right)\vdots 9 \Rightarrow 4\left(a^2+ab+b^2\right)\vdots 9$

$\Rightarrow\left[(2a-b)^2+3b^2\right]\vdots 9$ (1)

Mà $3b^2\vdots 3$nên $(2a-b)^2\vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố nên $(2a-b)\vdots 3$.

$(2a-b)\vdots 3$ nên $(2a-b)^2\vdots 9$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3b^2\vdots 9 \Rightarrow b^2\vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố $\Rightarrow b\vdots 3$.

$(2a-b)\vdots 3$ và $b\vdots 3$ $\Rightarrow$ $2a\vdots 3$ mà $(2;3)=1$ nên $a\vdots 3$.

Vậy cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Ta có tích của từ ba số tự nhiên liên tiếp trở lên thì chia hết cho 3.

Theo đề bài 9^n+11 là tích k số tự nhiên liên tiếp mà 9^n+11không chia hết cho 3 nên $k=2$.

Đặt $9^n+11=a(a+1)$ với a là số nguyên dương.

$9^n+11=a(a+1) \Leftrightarrow 4.9^n+45=4a^2+4a+1$

$\Leftrightarrow(2a+1)^2-\left(2.3^n\right)^2=45 \Leftrightarrow\left(2a+1-2.3^n\right)\left(2a+1+2.3^n\right)=45$.

Vì a,n nguyên dương và $2a+1+2.3^n\geq 9$ nên xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\begin{cases}2a+1-2.3^n=9 & (1)\\ 2a+1+2.3^n=5 & (2)\end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có $4a+2=14 \Leftrightarrow a=3 \Rightarrow 9^n+11=12 \Leftrightarrow 9^n=1 \Leftrightarrow n=0$ (Loại).

Trường hợp 2. $\begin{cases}2a+1-2.3^n=15 & (3)\\ 2a+1+2.3^n=3 & (4)\end{cases}$

Từ (3) và (4) ta có $4a+2=18 \Leftrightarrow a=4 \Rightarrow 9^n+11=20 \Leftrightarrow 9^n=9 \Leftrightarrow n=1$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 3. $\begin{cases}2a+1-2.3^n=45 & (5)\\ 2a+1+2.3^n=1 & (6)\end{cases}$

Từ (5) và (6) ta có $4a+2=46 \Leftrightarrow a=11 \Rightarrow 9^n+11=132 \Leftrightarrow 9^n=121 \Leftrightarrow n\in\varnothing$.

Vậy $n=1$.

Câu 3:

a) Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}>0;\ \frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}>0;\ \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}>0.$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có:

$$36=\left(\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{4-y}.\frac{1}{\sqrt{4-y}}+\sqrt{y}.\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{4-z}.\frac{1}{\sqrt{4-z}}+\sqrt{z}.\frac{1}{\sqrt{z}}\sqrt{4-x}.\frac{1}{\sqrt{4-x}}\right)^2$$

$$\le(x+4-y+y+4-z+z+4-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 36\le 12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)\ge 3. \qquad (*)$$

Giả sử ba số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{4-z},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ đều nhỏ hơn 1

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)<1+1+1=3 \text{ (Trái với } (*))$$

Do đó trong các số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{4-z},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Ta có $2P=2(ab+bc+ca)-2abc$

$=2(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2-1$ (Vì $-2abc=a^2+b^2+c^2-1$)

$=(a+b+c)^2-1.$

Mặt khác: $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

$\Leftrightarrow\ a^2b+2abc+c^2=1-a^2-b^2+a^2b^2$

$\Leftrightarrow(ab+c)^2=(1-a^2)(1-b^2).$

Từ $a^2+b^2+c^2+2abc=1 \Rightarrow a^2<1$, $b^2<1 \Rightarrow 1-a^2>0$, $1-b^2>0$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ với hai số $1-a^2, 1-b^2$ ta có:

$$(ab+c)^2=(1-a^2)(1-b^2)\le\left(\frac{2-a^2-b^2}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow ab+c\le\frac{2-a^2-b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow c\le\frac{2-(a+b)^2}{2}. \qquad (1)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức $AM-GM$ với hai số $(a+1)^2$ và 1 ta có:

$$(a+b)^2+1\ge 2.\sqrt{(a+b)^2.1}=2(a+b)$$

$$\Rightarrow a+b\le\frac{(a+b)^2+1}{2}. \qquad (2)$$

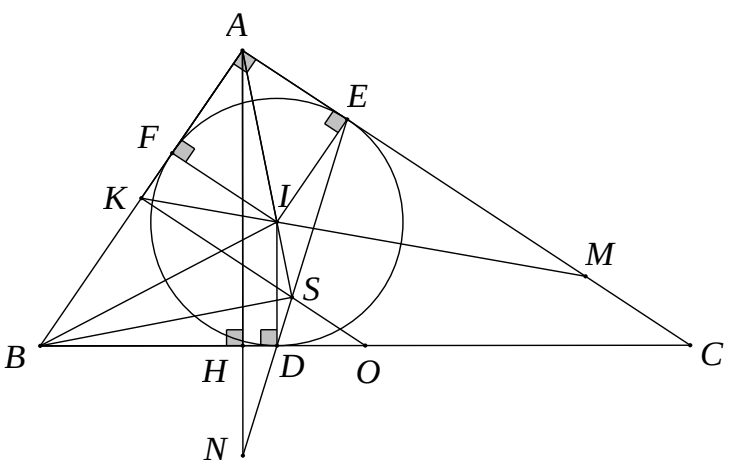
Từ (1) và (2) ta có: $a+b+c\le\frac{(a+b)^2+1}{2}+\frac{2-(a+b)^2}{2}=\frac{3}{2}$.

Do đó $2P\le\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}\Rightarrow P\le\frac{5}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}1-a^2=1-b^2\\(a+b)^2=1\\a^2+b^2+c^2+2abc=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$.

Vậy $MaxP=\frac{5}{8}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$.

Câu 4:



a) Ta có AI là tia phân giác của góc BAC nên $\widehat{IAB}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$,

BI là tia phân giác của góc ABC nên $\widehat{IBA}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}$.

Theo tính chất tổng ba góc trong ΔAIB ta có:

$$\widehat{AIB}=180^\circ-\left(\widehat{IAB}+\widehat{IBA}\right)=180^\circ-\frac{\widehat{BAC}+\widehat{ABC}}{2}$$

$=180^\circ-\frac{180-\widehat{C}}{2}$ (Do $\widehat{BAC}+\widehat{ABC}=180^\circ-\widehat{C}$ theo tính chất tổng ba góc của tam giác)

$=90^\circ+\frac{\widehat{C}}{2}$.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $CE=CD$ $\Rightarrow \Delta CED$ cân tại C

$\Rightarrow$ $\widehat{DEC}=\frac{180^\circ-\widehat{C}}{2}$.

Lại có: $\widehat{AES}=180^\circ-\widehat{DEC}$ (Hai góc kề bù)

$=180^\circ-\frac{180^\circ-\widehat{C}}{2}=90^\circ+\frac{\widehat{C}}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{AIB}=\widehat{AES}=90^\circ+\frac{\widehat{C}}{2}$.

Mặt khác $\widehat{EAS}=\widehat{IAB}$ (Tính chất tia phân giác).

Do đó: $\Delta IAB \# \Delta EAS$ (g - g).

b) Ta có: $\Delta IAB \# \Delta EAS$ $\Rightarrow$ $\widehat{ASE}=\widehat{ABI}=\widehat{IBD}$.

Tứ giác $IBDS$ có $\widehat{IBD}+\widehat{ISD}=\widehat{ASE}+\widehat{ISD}=180^\circ$ $\Rightarrow$ Tứ giác $IBDS$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{ISB}=\widehat{IDB}=90^\circ$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BI}$ nhỏ) mà $\widehat{IAB}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=45^\circ$ (Tính chất tia phân giác) $\Rightarrow \Delta ASB$ vuông cân tại S.

ΔASB vuông cân tại S có SA là đường trung tuyến nên SA là đường trung trực của AB. (*)

Mặt khác ΔABC vuông có AO là trung tuyến nên $OA = OB = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AB. $(**)$

Từ $(*)$ và $(**) \Rightarrow$ Ba điểm K, O, S thẳng hàng.

c) Vì AI là tia phân giác của ΔAMK nên $\frac{AK}{AM} = \frac{IK}{IM}$. (1)

$IF//AM$ (Cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \frac{IK}{IM} = \frac{FK}{FA}$ (Định lý Ta lét). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AK}{AM} = \frac{FK}{FA} \Rightarrow \frac{AK}{FK} = \frac{AM}{AF}$. (3)

Mặt khác $ID//AN$ (Cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow \frac{AN}{ID} = \frac{SA}{SI}$ (Hệ quả định lý Ta lét)

mà $IF//KS$ (Cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \frac{SA}{SI} = \frac{AK}{FK}$ nên $\frac{AN}{ID} = \frac{AK}{FK}$. (4)

Từ (3) và (4) ta có $\frac{AM}{AF} = \frac{AN}{ID}$.

Tứ giác $AEIF$ có $\widehat{EAF} = \widehat{AFI} = \widehat{AEI} = 90°$ nên tứ giác $AEIF$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AF = EI = ID$.

Ta có $AF = ID$ và $\frac{AM}{AF} = \frac{AN}{ID}$ nên $AM = AN$.

Câu 5:

Ta thấy hai ô vuông ở hai góc đối của hình vuông 10×10 là xa nhau nhất.

Gọi các số được điền vào mỗi ô vuông đó lần lượt là $a_1, a_2, a_3, ..., a_{19}$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
									a_{11}
									a_{12}
									a_{13}
									a_{14}
									a_{15}
									a_{16}
									a_{17}
									a_{18}
									a_{19}

Ta có

$\Leftrightarrow -1 < a_1 - a_2 < 1$.

Tương tự ta có:

$-1 < a_2 - a_3 < 1$;
.....; $|a_1 - a_2| < 1$

$-1 < a_{18} - a_{19} < 1$.

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có:

$-18 < a_1 - a_{19} < 18 \Leftrightarrow |a_1 - a_{19}| < 18$.

Vì $a_1, a_2, a_3, ..., a_{19}$ là các số nguyên nên chỉ có tối đa 19 số nguyên khác nhau được điền vào trong bảng.

Có 100 ô vuông trên bảng nên theo nguyên lý Dirichle thì sẽ có một số xuất hiện trên bảng ít nhất là $\left[\frac{100}{19}\right] + 1 = 6$ (lần).

ĐỀ SỐ 2 (2017-2018)

Võ Quốc Bá Cẩn- Nguyễn Phúc Lữ - Nguyễn Lê Phước

Câu 1:

a) Từ giả thiết, ta có: $P = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 = 2018.\frac{2017}{2018} - 3 = 2014.$

b) Điều kiện $x^2+xy+y^2\neq 0$.Từ phương trình suy ra x – y ≠ 0. Bây giờ, ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng $13(x-y)=7(x^2+xy+y^2)$. (1)

Từ đây, ta có 13(x – y) chia hết cho 7. Mà (13, 7) = 1 nên x – y chia hết cho 7. (2)

Mặt khác, ta lại có: $x^2+xy+y^2=\frac{1}{4}(x-y)^2+\frac{3}{4}(x+y)^2\geq\frac{1}{4}(x-y)^2$.

Do đó kết hợp với (1) ta suy ra: $13(x-y)\geq\frac{7}{4}(x-y)^2$.

Từ đó, với chú ý x – y ≠ 0, ta có đánh giá $0<x-y<\frac{52}{7}$.Kết hợp với (2), ta được x – y = 7. Thay kết quả vào (1), ta tính được $x^2+xy+y^2=13$.

Giải hệ phương trình x – y = 7 và $x^2+xy+y^2=13$, ta được cặp (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài là (3, -4) và (4; -3).

Bình luận: Ở câu b) học sinh cũng có thể sử dụng phương pháp phương trình bậc hai để giải. Tuy nhiên, do các hệ số của phương trình tương đối lớn nên khối lượng tính toán sẽ nhiều vất vả để chặn gía trị của x, y.

Câu 2: a) Điều kiện $x\geq-\frac{1}{2}$. Do $6x^2+2x+1=5x^2+(x+1)^2>0$ nên từ phương trình ta suy ra x > 0. Bây giờ, đặt $a=\sqrt{6x+3}$ ta có $6x^2+2x+1=6x^2+\frac{1}{3}a^2$ nên phương trình đã cho viết lại thành: $6x^2+\frac{1}{3}a^2=3xa$ *hay* $(a-6x)(a-3x)=0$.

Từ đây ta có a = 3x hoặc a = 6x.

Với a = 3x, ta có $9x^2=6x+3$. Từ đây, với chú ý x > 0, ta giải được x = 1.

Với a = 6x, ta có $36x^2=6x+3$. Từ đây, với chú ý x > 0 ta giải được $x=\frac{1+\sqrt{13}}{12}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm x = 1 và $x=\frac{1+\sqrt{13}}{12}$.

b) Điều kiện: x ≥ -2. Từ phương trình thứ hai, suy ra y ≥ - 2. Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành: $x^3+x=(y-1)^3+(y-1)$.

Ta thấy, nếu x > y – 1 thì VT > VP còn nếu x < y -1 thị ngược lại. Do đó x = y – 1 (suy ra y ≥ -1) . Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$2\sqrt{y+1}=y+2,\ hay\ \left(\sqrt{y+1}-1\right)^2=0$$

Giải phương trình này, ta được y = 0. Một cách tương ứng, ta có x = -1.

Vậy hệ phương trình óc nghiệm (x, y) duy nhất là (-1, 0).

Câu 3:

a) Giả sử bộ số *(m, n, p)* thỏa mãi yêu cầu. Dễ thấy 0 < m, n < p.

Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $(m+n)A = p^{2018}$ (1)

trong đó $A = m^{2018} - m^{2017}n + m^{2017}n^2 - ... - mn^{2017} + n^{2018}$.

Nếu A không chia hết cho p thì từ (1), ta có A = 1 và

$m + n = p^{2018} = m^{2019} + n^{2019}$.

Từ đó, dễ thấy m = n = 1 và $p^{2018} = 2$, mâu thuẫn. Vậy A chia hết cho p.

Do m + n > 1 nên từ (1) suy ra m + n chia hết cho p. Khi đó, ta có:

$$A \equiv 2019m^{2018} \pmod{p}.$$

Do A chia hết cho p và 0 < m < p nên từ kết quả trên, ta suy ra 2019 chia hết cho p, hay p = 2019. Từ đó, dễ thấy m và n khác tính chẵn lẻ, hay m ≠ n.

Bây giờ, ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng:

$$\left(m^3\right)^{673} + \left(n^3\right)^{673} = 2019^{2018} \text{ hay } (m+n)\left(m^2 - mn + n^2\right)B = 2019^{2018}$$

Trong đó $B = \left(m^3\right)^{672} - \left(m^3\right)^{671}\left(n^3\right) + ... - \left(m^3\right)\left(n^3\right)^{671} + \left(n^3\right)^{672}$.

Do m ≠ n nên $m^2 - mn + n^2 = (m-n)^2 + mn > 1$, từ đó ta có $m^2 - mn + n^2$ chia hết cho 2019. Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra do

$$m^2 - mn + n^2 \equiv 3n^2 \pmod{2019}$$
$$\not\equiv 0 \pmod{2019}.$$

Vậy không tồn tại các số m, n, p thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

b) Ta sẽ chứng minh $P \geq \frac{1}{6}$ với dấu bằng đạt được tại (x, y, z) = (0, 1, 2) (và các hoán vị vòng quanh của bộ này). Bất đẳng thức $P \geq \frac{1}{6}$ tương đương với

$$\frac{16x}{y^3+16} + \frac{16y}{z^3+16} + \frac{16z}{x^3+16} \geq \frac{8}{3},$$

$$\text{hay } \left(x - \frac{16x}{y^3+16}\right) + \left(y - \frac{16y}{z^3+16}\right) + \left(z - \frac{16z}{x^3+16}\right) \leq x + y + z - \frac{8}{3}.$$

Một cách tương đương, ta phải chứng minh

$$\frac{xy^3}{y^3+16} + \frac{yz^3}{z^3+16} + \frac{zx^3}{x^3+16} \leq \frac{1}{3}. \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử y nằm giữa x và z. Ta có

$$y^3+16=(y+4)(y-2)^2+12y\ge 12y$$

Nên $\dfrac{y}{y^3+16}\le\dfrac{1}{12}$. Từ đó $\dfrac{xy^3}{y^3+16}\le\dfrac{xy^2}{12}$.

Đánh giá tương tự, ta cũng có $\dfrac{yz^3}{z^3+16}\le\dfrac{yz^2}{12}$, $\dfrac{zx^3}{x^3+16}\le\dfrac{zx^3}{12}$.

Suy ra $\dfrac{xy^3}{y^3+16}+\dfrac{yz^3}{z^3+16}+\dfrac{zx^3}{x^3+16}\le\dfrac{xy^2+yz^2+zx^2}{12}$ (2).

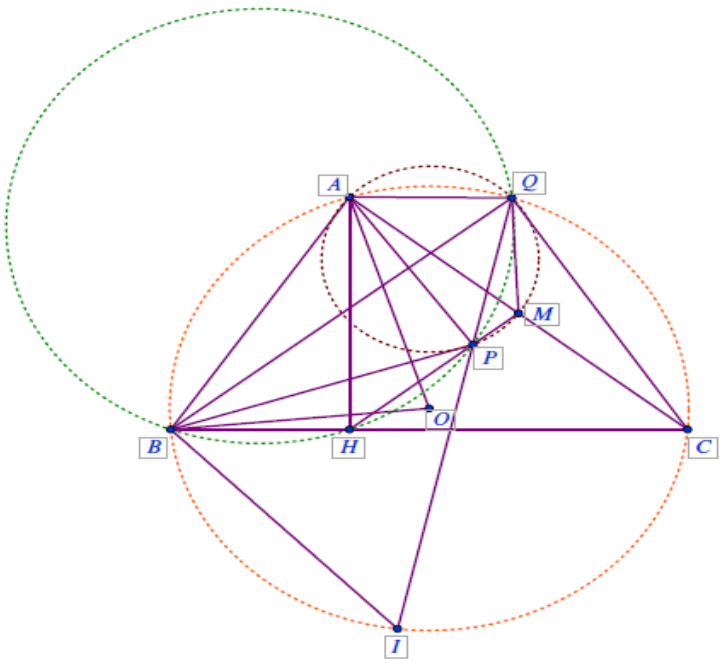
Do y nằm giữa x và z ta có (y – z)(y – x) ≤ 0,

suy ra $y^2+zx\le xy+yz$ và $xy^2+zx^2\le xy^2+xyz$. Từ đó, ta có đánh giá:

$$\begin{aligned}xy^2+yz^2+zx^2&\le y\left(x^2+xz+z^2\right)\le y(x+z)^2\\&=y(3-y)^2=4-(4-y)(y-1)^2\\&\le 4.\end{aligned}\qquad(3)$$

Từ (2) và (3) ta thu được (1). Vậy $\min P=\dfrac{1}{6}$.

Câu 4:



Lời giải. a) Ta có $\angle ACB = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \angle AOB$ (tính chất góc nội tiếp chắn cung). Mà $OA = OB$ nên $\angle BAO = \angle ABO$, suy ra

$$\angle AOB + 2\angle BAO = 90^\circ.$$

Từ đây, ta có $2\angle ACB + 2\angle BAO = 90^\circ$, hay

$$\angle BAO = 90^\circ - \angle ACB = \angle HAC \text{ (vì } \angle AHC = 90^\circ).$$

Vậy $\angle BAO = \angle CAH$.

b) Xét tứ giác $APHB$, ta có $\angle APB = \angle AHB = 90^\circ$ (gt). Mà hai góc này cùng nhìn cạnh AB nên tứ giác $APHB$ nội tiếp. Suy ra $\angle ABP = \angle AHP$ (cùng chắn cung AP). (1)

Xét tam giác AHC vuông tại H có M là trung điểm của AC nên $MH = MC = MA$ (đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền). Từ đó suy ra

$$\angle AHP = \angle AHM = \angle MAH = \angle CAH = \angle BAO = \angle ABO. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có $\angle ABP = \angle ABO$ nên các tia BO và BP trùng nhau. Từ đó suy ra ba điểm B, O, P thẳng hàng.

c) Ta có tứ giác $BQPH$ nội tiếp nên và hai góc BQP, BHP ở vị trí đối nhau nên

$$\angle BQP = 180^\circ - \angle BHP = \angle PHC = \angle MHC.$$

Mặt khác, ta lại có $MH = MC$ (chứng minh trên) nên

$$\angle MHC = \angle MCH = \angle ACB.$$

Từ đây, ta suy ra

$$\angle BQP = \angle ACB.$$

Lại có tứ giác $AQMP$ nội tiếp nên $\angle AQP = \angle AMP = \angle AMH$ (cùng chắn cung AP). Mà $\angle AMH = \angle MHC + \angle MCH = 2\angle MCH = 2\angle ACB$ (tính chất góc ngoài) nên

$$\angle AQP = 2\angle ACB.$$

Từ đó

$$\angle AQB = \angle AQP - \angle BQP = \angle ACB.$$

Hai góc AQB và ACB cùng nhìn cạnh AB nên tứ giác $AQCB$ nội tiếp. Bây giờ, gọi I là giao điểm khác P của PQ và (O). Ta có

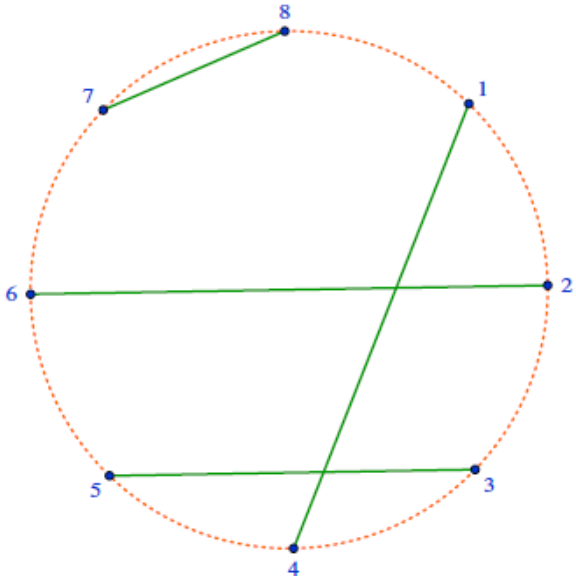
$$\angle BQI = \angle BQP = \angle ACB = \angle AQB$$

nên $\text{sđ}\overset{\frown}{BA} = \text{sđ}\overset{\frown}{BI}$, hay $BA = BI$. Suy ra I là giao điểm khác A của các đường tròn (B, BA) và (O), tức I cố định. Vậy đường thẳng PQ luôn đi qua I cố định. □

Câu 5:

Lời giải. Ta đánh số $2n$ đỉnh của đa giác từ 1 đến $2n$. Khi đó, độ dài của đoạn thẳng nối hai đỉnh có thể coi tương ứng với số lượng cung nhỏ nằm giữa hai đỉnh đó, cũng chính là chênh lệch giữa hai số thứ tự theo mod n rồi cộng thêm 1. Sự tồn tại hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau trong đề bài tương ứng với việc tồn tại hai cặp đỉnh có chênh lệch giữa các số thứ tự bằng nhau theo mod n.

a) Ta cần chỉ ra cách chia cặp 8 số từ 1 đến 8 sao cho không có hai cặp nào có chênh lệch giống nhau theo mod 4. Cụ thể là, $(1, 4)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$ và $(7, 8)$ với các chênh lệch là $3, 4, 2, 1$, thỏa mãn đề bài.



b) Giả sử ngược lại tồn tại cách ghép cặp $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{10}, b_{10})$ cho các số từ 1 đến 20 sao cho không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 10. Suy ra

$$\begin{aligned}|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{10} - b_{10}| &\equiv 0 + 1 + \cdots + 9 \pmod{10}\\ &\equiv 5 \pmod{10}.\end{aligned}$$

Do đó, tổng $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{10} - b_{10}$ là số lẻ. Chú ý rằng với mọi x, y nguyên thì $|x - y|$ có cùng tính chẵn lẻ với $x + y$. Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra tổng $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_{10} + b_{10})$ cũng lẻ. Mặt khác, ta lại có

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_{10} + b_{10}) = 1 + 2 + \cdots + 20 = 210$$

là số chẵn. Mâu thuẫn nhận được cho ta kết quả cần chứng minh. □

Bình luận. Việc mô hình hóa thành việc ghép cặp các số khiến bài toán sáng sủa hơn nhiều bởi đa giá có kích thước $2n = 20$ trong câu **b)** không dễ để vẽ.

ĐỀ SỐ 3 (2016-2017)

Nguyễn Công Lợi

Bài 1 (5.0 điểm).

a) Chứng minh rằng n^5+5n^3-6n chia hết cho 30 với mọi số nguyên dương n.

• ***Phân tích.*** *Đặt* $A=n^5+5n^3-6n$ *và để ý là* $30=2.3.5$ *(2, 3, 5 nguyên tố cùng nhau theo từng đôi một) do đó ta phân tích A sao cho A chia hết cho 2, 3, 5.*

• **Lời giải.** Đặt $A=n^5+5n^3-6n$ khi đó ta có

$$\begin{aligned}A&=n^5+5n^3-6n=n(n-1)(n+1)(n^2+6)=n(n-1)(n+1)(n^2-4+10)\\&=n(n-1)(n+1)(n^2-4)+10n(n-1)(n+1)\\&=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+10(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

Do $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ là tích của năm số tự nhiên liên tiếp nên tích này chia hết cho cả 2, 3, 5. Mà 2, 3, 5 nguyên tố cùng nhau theo từng đôi 1 nên $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 30. Mặt khác ta lại có $(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 2, 3 nên chia hết cho 6. Do đó $10(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 30. Vậy A chia hết cho 30 hay n^5+5n^3-6n chia hết cho 30.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $(x;y)$ sao cho x^2+8y và y^2+8x đều là số chính phương.

• ***Phân tích.*** *Dễ thấy vai trò của hai biến x và y trong bài toán như nhau nên ta có thể giả sử* $x\ge y$, *khi đó ta có thấy được mối liên hệ* $x^2+8y\le x^2+8x<x^2+8x+16=(x+4)^2$. *Để ý là* $x^2<x^2+8y$. *Như vậy ta được* $x^2<x^2+8y<(x+4)^2$. *Do* x^2+8y *là số chính phương nên ta có thể suy ra được*

$$x^2+8y=(x+1)^2,(x+2)^2,(x+3)^2$$

Đến đây ta xét các trường hợp để tìm $(x;y)$ *thỏa mãn.*

• **Lời giải.** Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x\ge y$. Khi đó ta có

$$x^2<x^2+8y\le x^2+8x<x^2+8x+16=(x+4)^2$$

Mà x^2+8y là số chính phương nên ta có thể suy ra được x^2+8y nhận một trong các giá trị

$$(x+1)^2;(x+2)^2;(x+3)^2$$

+ Trường hợp 1. Khi $x^2+8y=(x+1)^2$ ta được $x^2+8y=x^2+2x+1\Leftrightarrow 8y=2x+1$, trường hợp này không xẩy ra do $8y$ là số chẵn và $2x+1$ là số lẻ.

+ Trường hợp 2. Khi $x^2+8y=(x+2)^2$ ta được $x^2+8y=x^2+4x+4\Leftrightarrow x=2y-1$.

Do y^2+8x là số chính phương nên suy ra $y^2+16y-8$ là số chính phương.

Khi $y=1$ ta được $x=1$ và cặp số $(x;y)=(1;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Xét $y\ge 2$, khi đó ta có $y^2+16y-8=(y+3)^2+(10y-17)>(y+3)^2$

Đồng thời ta cũng có $y^2+16y-8=(y+6)^2-72<(y+8)^2$.

Do đó suy ra $(y+3)^2<y^2+16y-8<(y+8)^2$. Mà $y^2+16y-8$ là số chính phương.

Suy ra $y^2+16y-8\in\left\{(y+4)^2;(y+5)^2;(y+6)^2;(y+7)^2\right\}$.

Giải trực tiếp các trường hợp ta được các cặp số $(x;y)=(5;3),(21;11)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Trường hợp 3. Khi $x^2+8y=(x+3)^2$ ta được $x^2+8y=x^2+6x+9\Leftrightarrow 8y=6x+9$, trường hợp này không xẩy ra do $8y$ là số chẵn và $6x+9$ là số lẻ.

Vậy các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y)=(1;1),(3;5),(5;3),(11;21),(21;11)$

• ***Nhận xét.*** *Để tìm y thỏa mãn* $y^2+16y-8$ *là số chính phương ta có thể xử lý theo cách khác*
Đặt $y^2+16y-8=k^2\ (k\in N)$. *Khi đó ta có*

$$y^2+16y-8=k^2\Leftrightarrow(y+8)^2=k^2+72\Leftrightarrow(y+8-k)(y+8+k)=72$$

Để ý rằng $y+8+k>y+8-k>0$ *và* $y+8+k;y+8-k$ *cùng tính chẵn lẻ.*

Lại có $72=2.36=4.18=6.12$. *Đến đây ta xét các trường hợp xẩy ra để tìm y theo bản sau*

$y+8-k$	*2*	*4*	*6*
$y+8+k$	*36*	*18*	*12*
k	*17*	*7*	*3*
y	*11*	*3*	*1*

Đến đây ta có kết quả tương tự như trên.

Bài 2 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x-\frac{3}{x}}+\sqrt{\frac{6}{x}-2x}=1+\frac{3}{2x}$

• ***Phân tích.*** *Phương trình đã cho có chứa hai căn thức và có ẩn ở mẫu. Quan sát kỹ phương trình ta nhận thấy* $\left(2x-\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{6}{x}-2x\right)=\frac{3}{x}$ *có mối liên hệ với vế phải của phương trình, do đó ta sử dụng các đánh giá để làm mất căn thức hoặc đưa hai biểu thức trong căn vào cùng một căn thức.*
Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\sqrt{2x-\frac{3}{x}}+\sqrt{\frac{6}{x}-2x}\le\frac{1}{2}\left(1+2x-\frac{3}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{6}{x}-2x\right)=1+\frac{3}{2x}$.
Đến đây ta giải quyết được phương trình.

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq 0; 2x - \frac{3}{x} \geq 0; \frac{6}{x} - 2x \geq 0$ hay $\frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \sqrt{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} \leq \frac{1}{2}\left(1 + 2x - \frac{3}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{6}{x} - 2x\right) = 1 + \frac{3}{2x}$$

Kết hợp với phương trình đã cho suy ra dấu bằng của các bất đẳng thức trên xẩy ra

Do đó ta có $\begin{cases} 2x - \frac{3}{x} = 1 \\ \frac{6}{x} - 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = \frac{3}{2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\frac{4x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\frac{5y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \end{cases}$

• ***Phân tích.*** *Quan sát hệ phương trình ta nhận thấy* $\sqrt{\frac{4x}{5y}}.\sqrt{\frac{5y}{x}} = 2$ *và khi nhân hai vế phải của hai phương trình thì ta lại có* $\left(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\right) = 2y$. *Đến đây ta được* $y = 1$, *khi đó ta đưa về giải phương trình* $\sqrt{\frac{5}{x}} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$.

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x \geq y > 0$. Nhận theo vế hai phương trình của hệ đã cho ta được

$$\sqrt{\frac{4x}{5y}}.\sqrt{\frac{5y}{x}} = \left(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\right) \Leftrightarrow 2 = 2y \Leftrightarrow y = 1$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được $\sqrt{\frac{5}{x}} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$.

+ Xét $x = \frac{5}{4}$. Khi đó ta được $\sqrt{4} = \sqrt{\frac{5}{4}+1} + \sqrt{\frac{5}{4}-1}$, đẳng thức đúng. Do đó $x = \frac{5}{4}$ là một nghiệm của phương trình.

+ Xét $x > \frac{5}{4}$. Khi đó ta có $\sqrt{\frac{5}{x}} < \sqrt{4} = \sqrt{\frac{5}{4}+1} + \sqrt{\frac{5}{4}-1} < \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$, do đó phương trình không có nghiệm.

+ Xét $x < \frac{5}{4}$. Khi đó ta có $\sqrt{\frac{5}{x}} > \sqrt{4} = \sqrt{\frac{5}{4}+1} + \sqrt{\frac{5}{4}-1} > \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$, do đó phương trình không có nghiệm

Do đó $x = \frac{5}{4}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y) = \left(\frac{5}{4};1\right)$.

Bài 3. Với mọi số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

a) Chứng minh rằng $x + y + z \le 2 + xy$.

• **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$x + y + z = (x + y).1 + z.1 \le \frac{(x+y)^2 + 1}{2} + \frac{z^2 + 1}{2} = \frac{x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + 2}{2} = 2 + xy$$

Dấu bằng xẩy ra tại $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = z = 1; y = 0 \\ y = z = 1; x = 0 \end{array}\right.$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2 + yz} + \frac{y}{2 + zx} + \frac{z}{2 + xy}$.

• **Lời giải.**

+ Tìm giá trị lớn nhất của P.

Áp dụng kết quả câu a ta có các bất đẳng thức

$$x + y + z \le 2 + xy; x + y + z \le 2 + yz; x + y + z \le 2 + zx$$

Khi đó ta được $P = \frac{x}{2 + yz} + \frac{y}{2 + zx} + \frac{z}{2 + xy} \le \frac{x}{x + y + z} + \frac{y}{x + y + z} + \frac{z}{x + y + z} = 1$.

Do đó giá trị lớn nhất của P là 1, dấu bằng xẩy ra tại $x = y = 1; z = 0$ và các hoán vị.

+ Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{x}{2 + yz} = \frac{2x}{4 + 2yz} \ge \frac{2x}{4 + y^2 + z^2} = \frac{2x}{6 - x^2}$.

Ta sẽ chứng minh khi $0 \le x \le \sqrt{2}$ thì $\frac{2x}{6 - x^2} \ge \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$. Thật vậy, đặt $t = x\sqrt{2}$ thì ta có $0 \le t \le 1$.

Ta cần chứng minh $\frac{t\sqrt{2}}{3 - t^2} \ge \frac{t^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t(1 - t)^2(2 + t) \ge 0$ là một bất đẳng thức đúng.

Vậy ta có $\frac{2x}{6 - x^2} \ge \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$, dấu bằng xẩy ra tại $x = 0$ hoặc $x = \sqrt{2}$.

Như vậy ta có $\frac{x}{2 + yz} \ge \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{y}{2+zx} \ge \frac{y^2}{2\sqrt{2}}; \frac{z}{2+xy} \ge \frac{z^2}{2\sqrt{2}}$. Công theo vế các bất đẳng thức ta được

$$P = \frac{x}{2+yz} + \frac{y}{2+zx} + \frac{z}{2+xy} \ge \frac{x^2+y^2+z^2}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dấu bằng xẩy ra khi $x = \sqrt{2}; y = z = 0$ và các hoán vị.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{\sqrt{2}}{2}$, đạt được tại $x = \sqrt{2}; y = z = 0$ và các hoán vị.

• ***Nhận xét.*** *Câu a của bài toán chính là gợi ý để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P. Ngoài ra ta có thể tìm giá trị lớn nhất của P độc lập với gợi ý ở câu a như sau*

$$2P = \frac{2x}{2+yz} + \frac{2y}{2+zx} + \frac{2z}{2+xy} = x+y+z-xyz\left(\frac{1}{2+yz} + \frac{1}{2+zx} + \frac{1}{2+xy}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$\frac{1}{2+yz} + \frac{1}{2+zx} + \frac{1}{2+xy} \ge \frac{9}{6+xy+yz+zx} \ge \frac{9}{6+x^2+y^2+z^2} = \frac{9}{8} > 1$$

Khi đó ta có $2P \le x+y+z-xyz = x(1-yz)+y+z$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được ta lại có

$$\left[x(1-yz)+(y+z)\right]^2 \le \left[x^2+(y+z)^2\right]\left[(1-yz)^2+1\right]$$
$$= (2+2yz)(2-2yz+y^2z^2) = 4+2y^2z^2(yz-1) \le 4$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $yz \le \frac{y^2+z^2}{2} \le 2$. *Do đó ta được* $4P^2 \le 4 \Rightarrow P \le 1$.

Với ý thứ hai của câu b ta có thể trình bày cách khác như sau

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$P = \frac{x}{2+yz} + \frac{y}{2+zx} + \frac{z}{2+xy} \ge \frac{(x+y+z)^2}{x(2+yz)+y(2+zx)+z(2+xy)} = \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)+3xyz}$$

Đặt $t = x+y+z$, *khi đó ta có* $t^2 \ge x^2+y^2+z^2 = 2$ *và* $t^2 \le 3(x^2+y^2+z^2) = 6$.

Từ đó suy ra $\sqrt{2} \le t \le \sqrt{6}$. *Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được*

$$9xyz \le (x+y+z)(xy+yz+zx) = \frac{t(t^2-2)}{2}$$

Kết hợp với bất đẳng thức trên ta được $P \ge \dfrac{t^2}{2t + \dfrac{t\left(t^2-2\right)}{2}} = \dfrac{6t}{t^2+10}$.

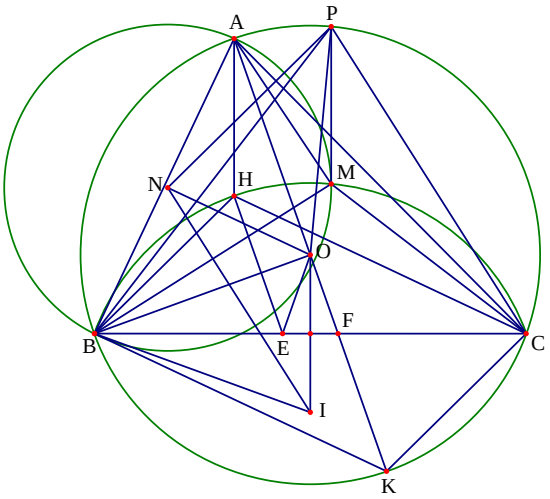
Ta có $\dfrac{6t}{t^2+10} \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 12t \ge \sqrt{2}\left(t^2+10\right) \Leftrightarrow \left(t-\sqrt{2}\right)\left(t-5\sqrt{2}\right) \le 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $\sqrt{2} \le t \le \sqrt{6}$. *Vậy ta được* $P \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 4 (6.0 điểm).

Cho tam giác ABC $(BC > CA > AB)$ nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC cắt tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$ tại điểm thứ hai là M. Gọi P là trực tâm của tam giác BMC.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, P cùng huộc một đường tròn.

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh bốn điểm A, B, C, P cùng thuộc một đường tròn ta cần có* $\widehat{BPC} = \widehat{BAC}$. *Do P là trực tâm tam giác BMC nên M là trực tâm tam giác PBC. Từ đó ta có* $\widehat{BPC} = 180^0 - \widehat{BMC}$. *Lại thấy* $\widehat{BAC} = 180^0 - \widehat{BHC}$. *Đến đây ta có điều cần chứng minh vì* $\widehat{BHC} = \widehat{BMC}$. • **Lời giải.** Do P là trực tâm tam giác BMC nên M là trực tâm tam giác PBC.	

Từ đó ta có $\widehat{BPC} = 180^0 - \widehat{BMC}$. Do H là trực tâm tam giác ABC nên $\widehat{BAC} = 180^0 - \widehat{BHC}$.

Mà ta lại có $\widehat{BHC} = \widehat{BMC}$ do tứ giác BHMC nội tiếp.

Do đó ta được $\widehat{BPC} = 180^0 - \widehat{BMC} = 180^0 - \widehat{BHC} = \widehat{BAC}$. Suy ra bốn điểm A, B, C, P cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng qua H song song với AO cắt cạnh BC tại E. Gọi F là điểm trên cạnh BC sao cho $CF = BE$. Chứng minh ba điểm A, F, O thẳng hàng.

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh ba điểm A, F, O thẳng hàng ta cần chứng minh F thuộc đường kính đi qua A của đường tròn* (O). *Giả sử AK là đường kính, khi đó ta đi chứng minh ba điểm A, F, K thẳng hàng. Giả thiết cho HE song song với AK nên ta đi chứng minh FK song song với EH.*

Dễ thấy hai tam giác HBE và CKF bằng nhau nên $\widehat{KFC} = \widehat{HEB}$, *đến đây ta có điều phải chứng minh.*

• **Lời giải.** Dựng đường kính AK của đường tròn (O). Khi đó dễ dàng chứng minh được tứ giác BHCK là hình bình hành.

Xét hai tam giác BHE và CKF có $BE = CF; \widehat{HBE} = \widehat{KCF}; BH = CK$ nên $\Delta BHE = \Delta CKF$.

Từ đó ta được $\widehat{KFC} = \widehat{HEB}$, từ đó ta được HE song song với KF. Lại có AK song song với HE nên ba điểm A, F, K thẳng hàng. Suy ra ba điểm A, F, O thẳng hàng.

c) Gọi N là tam đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM. Chứng minh rằng $PN = PO$.

• **Phân tích và lời giải.** Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC. Ta có $\Delta BHC = \Delta CKB$ nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BKB. Từ đó ta suy ra được $OB = OC = IB = IC$. Chú ý rằng ON là đường trung trực của AB và OI là đường trung trực của BC, IN là đường trung trực của BM nên ta suy ra được $\widehat{ONI} = \widehat{ABM}$ và $\widehat{OIN} = \widehat{MBC}$.

Từ đó dẫn đến $\widehat{ABM} = \widehat{MBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ nên $\widehat{OIN} = \widehat{ONI} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ hay tam giác OIN cân tại O, đồng thời ta có $\widehat{NOI} = 180^0 - 2\widehat{NIO} = 180^0 - \widehat{ABC}$.

Lại có $\widehat{POB} = 2\widehat{PCB} = 2\left(90^0 - \widehat{MBC}\right) = 180^0 - 2\widehat{MBC} = 180^0 - \widehat{ABC}$.

Từ đó ta được $\widehat{NOI} = \widehat{POB}$ nên suy ra $\widehat{NOP} = \widehat{IOB}$.

Hai tam giác OBI và OPN có $OI = ON; \widehat{NOP} = \widehat{IOB}; OB = ON$ nên $\Delta OBI = \Delta POB$.

Mà tam giác OBO cân tại B nên tam giác OPN cân tại P. Từ đó suy ra $PN = PO$

Bài 1 (1.0 điểm). Trên bàn có 100 thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Hai người A và B lần lượt chọn lấy một tẩm thẻ trên bàn sao cho nếu người A lấy tấm thẻ đánh số n thì đảm bảo người B chọn được tấm thẻ đánh số $2n + 2$. Hỏi người A có thể lấy được nhiều nhất bao nhiêu tấm thẻ trên bàn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• ***Phân tích.*** *Vì B bốc thẻ có đánh số* $2n+2$ *nên* $2n+2\le 100$. *Suy ra* $n\le 49$. *Do đó A chỉ được bốc các tấm thẻ có đánh số từ 1 đến 49. Ta xét tập* $\{1;2;3;4;...;49\}$. *Giả sử ta cho A bốc các tâm thẻ có đánh các số lẻ từ 1 đến 49. Như vậy A có thể bốc được 25 số. Khi đó B bốc được các 12 tấm thẻ đánh số chẵn là* $4;8;12;...48$ *có trong tập hợp trên và 13 tấm thẻ đánh số lấy từ các số còn lại. Cho A bốc các tâm thẻ có đánh số chẵn, khi đó A bốc được 8 số tương ứng với B bốc được 8 số trong đó có bố số thuộc tập hợp trên. Như vậy tập hợp trên vừa hết số. Do đó tối đa A chỉ bốc được 33 số. Để chứng minh điều này ta chia tập hợp* $\{1;2;3;4;...;49\}$ *thành các như sau*

+ Nhóm 1 gồm $\{1;4\},\{3;8\},\{5;12\};\{7;16\},...,\{23;48\}$, *trong đó có 12 số A bốc được và 12 số B bốc được có trong tập hợp trên.*

+ Nhóm 2 gồm $\{2;6\},\{10;22\},\{14;30\};\{18;38\}$, *trong đó có 4 số A bốc được và 4 số B bốc được có trong tập hợp trên.*

+ Nhóm 3 gồm $\{25\},\{27\},\{29\};\{31\},...,\{49\}$, *trong đó có 13 số A bốc được có trong tập hợp trên và tương ứng 13 số B bốc được từ các số còn lại.*

+ Nhóm 4 gồm $\{26\},\{32\},\{42\};\{46\}$, *trong đó có 4 số A bốc được có trong tập hợp trên và tương ứng 4 số B bốc được từ các số còn lại.*

Như vậy nếu A bốc được từ 34 số trở lên thì sẽ có hai số trùng nhau. Từ đó ta có lời giải như sau

• **Lời giải.** Vì B bốc thẻ có đánh số $2n+2$ nên $2n+2\le 100$. Suy ra $n\le 49$. Do đó A chỉ được bốc các tấm thẻ có đánh số từ 1 đến 49. Ta chia tập hợp $\{1;2;3;4;...;49\}$ thành 33 tập hợp con như sau

+ Nhóm 1 gồm $\{1;4\},\{3;8\},\{5;12\};\{7;16\},...,\{23;48\}$ (12 nhóm).

+ Nhóm 2 gồm $\{2;6\},\{10;22\},\{14;30\};\{18;38\}$ (4 nhóm).

+ Nhóm 3 gồm $\{25\},\{27\},\{29\};\{31\},...,\{49\}$ (13 nhóm).

+ Nhóm 4 gồm $\{26\},\{32\},\{42\};\{46\}$ (4 nhóm).

Trong mỗi nhóm A được chọn tối đa một số. Nếu A chọn được nhiều hơn 34 số trong các số từ 1 đến 49 thì theo nguyên lý Dirichlet sẽ tồn tại hai số bằng nhau. Do đó A chỉ chọn được tối đa 33 số.

Mặt khác A chỉ chọn được 33 số sau thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$\{1;3;5;...;23;2;10;14;18;25;27;29;...;49;26;32;42;46\}$$

Vậy A có thể lấy tối đa 33 tấm thẻ.

ĐỀ SỐ 4 (2015-2016)

Nguyễn Công Lợi

Câu 1. (5.0 điểm).

a) Cho các nguyên a, b, c, d thỏa mãn $a^3+b^3=2\left(c^3-8d^3\right)$. Chứng minh rằng $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh được* $a+b+c+d$ *chia hết cho 3 thì ta cần tạo ra tổng trong đó có chứa biểu thức* $a+b+c+d$ *và tổng đó chia hết cho 3. Để ý đến giả thiết* $a^3+b^3=2\left(c^3-8d^3\right)$, *ta nghĩ đến biến đổi để làm xuất hiện* $(a+b)^3+(c+d)^3$. *Do đó ta sẽ thêm bớt một lượng thích hợp cho giả thiết của bài toán. Ta có*

$$a^3+b^3+3ab(a+b)+\left(c^3+d^3\right)+3cd(c+d)=3ab(a+b)+3cd(c+d)+3c^3-15d^3$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^3+(c+d)^3=3ab(a+b)+3cd(c+d)+3c^3-15d^3$$

Dễ thấy $3ab(a+b)+3cd(c+d)+3c^3-15d^3$ *chia hết cho 3 nên ta được* $(a+b)^3+(c+d)^3$ *chia hết cho 3. Đến đây ta thấy nếu viết* $(a+b)^3+(c+d)^3$ *về dạng* $(a+b+c+d).A$ *thì ta chưa thể khẳng định được* $a+b+c+d$ *chia hết cho 3. Do đó ta sẽ viết biểu thức* $(a+b)^3+(c+d)^3$ *về dạng lũy thừa bậc ba của* $a+b+c+d$. *Ta có*

$$(a+b)^3+(c+d)^3=(a+b+c+d)^3-3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$$

Đến đây ta có được điều cần chứng minh.

• **Lời giải.** Từ giả thiết $a^3+b^3=2\left(c^3-8d^3\right)$ ta có

$$a^3+b^3+3ab(a+b)+\left(c^3+d^3\right)+3cd(c+d)=3ab(a+b)+3cd(c+d)+3c^3-15d^3$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^3+(c+d)^3=3ab(a+b)+3cd(c+d)+3c^3-15d^3$$

Dễ thấy $3ab(a+b)+3cd(c+d)+3c^3-15d^3$ chia hết cho 3 nên ta được $(a+b)^3+(c+d)^3$ chia hết cho 3.

Mặt khác ta lại có $(a+b)^3+(c+d)^3=(a+b+c+d)^3-3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$

Mà $3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$ chia hết cho 3 nên suy ra $(a+b+c+d)^3$ chia hết cho 3.

Do vậy $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

• ***Nhận xét.*** *Bản chất bài toán trên chính là bài toán cơ bản: Nếu* $x^3 + y^3$ *chia hết cho 3 thì* $x + y$ *chia hết cho 3.*

b) Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho $2^x + x^2$ là số nguyên tố.

• ***Phân tích.*** *Dễ thấy* $x = 2$ *không thỏa mãn yêu cầu bài toán còn* $x = 3$ *thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta cần chứng minh rằng khi* $x > 3$ *thì không tồn tại số nguyên tố thỏa mãn. Chú ý rằng khi* $x > 3$ *thì x là số nguyên tố lẻ ta luôn có* x^2 *chia 3 có số dư là 1. Ngoài ra khi số nguyên tố* $x > 3$ *thì* 2^x *chia 3 luôn dư 2. Điều này dẫn đến* $2^x + x^2$ *luôn chia hết cho 3, do đó khi* $x > 3$ *thì* $2^x + x^2$ *luôn là hợp số.*

• **Lời giải.** Ta xét các trường hợp sau

+ Khi $x = 2$ ta được $2^x + x^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ không phải là số nguyên tố.

+ Khi $x = 3$ ta được $2^x + x^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

+ Khi $x > 3$ thì x là số nguyên tố lẻ. Khi đó x^2 chia 3 có số dư là 1.

Ngoài ra do x là số nguyên tố lẻ nên ta đặt $x = 2k + 1\left(k \in N^*\right)$.

Từ đó ta có $2^x = 2^{2k+1} = 2.4^k = 2\left(3+1\right)^k$ chia 3 có số dư là 2.

Như vậy $2^x + x^2$ luôn chia hết cho 3. Do đó $2^x + x^2$ luôn là hợp số khi $x > 3$.

Vậy $x = 3$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• ***Nhận xét.*** *Với bài toán số học dạng này ta thường thử với một số nguyên tố nhỏ* $x = 2;3$. *Với các số nguyên tố lớn hơn ta chứng minh không thỏa mãn.*

Câu 2. (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 11x + 19} + \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 3\left(x + 2\right)$

• ***Phân tích.*** *Quan sát phương trình ta nhận thấy* $\left(2x^2 + 11x + 19\right) - \left(2x^2 + 5x + 7\right) = 6\left(x + 2\right)$ *nên ta nghĩ đến phép nhân liên hợp. Để ý là cần xét các trường hợp của phép nhân liên hợp có thể thực hiện được.*

• **Lời giải.** Điều kiện xácđịnh của phương trình là $2x^2 + 11x + 19 \ge 0; 2x^2 + 5x + 7 \ge 0$.

+ Xét $x = -2$, ta thấy thỏa mãn phương trình, do đó $x = -2$ là một nghiệm của phương trình.

+ Xét $x \neq -2$, khi đó ta có $\sqrt{2x^2+11x+19}-\sqrt{2x^2+5x+7} \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{6(x+2)}{\sqrt{2x^2+11x+19}-\sqrt{2x^2+5x+7}} = 3(x+2) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+11x+19}-\sqrt{2x^2+5x+7} = 2$.

Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ $\begin{cases} \sqrt{2x^2+11x+19}+\sqrt{2x^2+5x+7} = 3(x+2) \\ \sqrt{2x^2+11x+19}-\sqrt{2x^2+5x+7} = 2 \end{cases}$

Từ đó ta được $2\sqrt{2x^2+11x+19} = 3x+8 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+8 \geq 0 \\ 4(2x^2+11x+19) = (3x+8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm là $S = \{-2;2\}$.

- ***Nhận xét.***

+ Kỹ thuật nhân liên hợp như trên được gọi là nhân liên hợp đưa về hệ tạm. trong bài toán này sẽ có nhiều em sai lầm khi không xét các trường hợp $x = -2$ và $x \neq -2$, điều này vừa cho phép nhân liên hợp không xảy ra vừa làm cho ta lấy thiếu nghiệm.

+ Ngoài cách nhân liên hợp thì ta cũng có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ như sau.

Đặt $a = 2x^2+11x+19; b = 2x^2+5x+7 \, (a \geq 0; b \geq 0)$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b = 3(x+2) \\ a^2-b^2 = 6(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 3(x+2) \\ (a+b)(a-b) = 6(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 3(x+2) \\ (x+2)(a-b) = 2(x+2) \end{cases}$$

Đến đây ta có hai trường hợp $x+2=0$ và $a-b=2$ thì thu được kết quả tương tự như trên.

b) Tìm tất cả các bộ ba số $(x;y;z)$ thỏa mãn $\begin{cases} x+y+z = 3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3} \\ x^2+y^2+z^2 = 17 \end{cases}$

- ***Phân tích.*** *Để ý $x+y+z=3$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3}$ ta nhận thấy $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+y+z}$, khi đó quy đồng và phân tích thành tích ta được $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$. Đến đây ta xét các trường hợp rồi thế vào phương trình thứ ba để tìm nghiệm cho hệ.*

- **Lời giải.** Từ $x+y+z=3$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3}$ ta được $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+y+z}$. Khi đó ta được

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x+y+z} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy}+\frac{x+y}{z(x+y+z)} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(xy+zx+yz+z^2) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0$$

+ Xét trường hợp $x+y=0$, khi đó từ $x+y+z=3$ ta được $z=3$.

Cũng từ $x+y=0$ ta được $x=-y$. Thế vào $x^2+y^2+z^2=17$ ta được $2x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Từ đó ta được hai bộ số $(x;y;z)$ thỏa mãn là $(2;-2;3),(-2;2;3)$.

+ Giải các trường hợp $y+z=0$ và $z+x=0$ ta được các bộ số là hoán vị của hai bộ số trên.

Vậy các bộ số $(x;y;z)$ cần tìm là $(2;-2;3),(-2;2;3),(2;3;-2),(-2;3;2),(3;2;-2),(3;-2;2)$.

Câu 3. (3.0 điểm).

a) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $0<x,y,z<\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $xy+yz+zx=\frac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4x}{3-4x^2}+\frac{4y}{3-4y^2}+\frac{4z}{3-4z^2}$.

• ***Phân tích.*** *Dự đoán dấu bằng của bất đẳng thức xẩy ra tại* $x=y=z=\frac{1}{2}$. *Quan sát bất đẳng thức ta thấy biểu thức P có các đại lượng độc lập nhau về biến. Do đó ta nghĩ đến chứng minh các bất đẳng thức* $\frac{4x}{3-4x^2}\ge f(x);\frac{4y}{3-4y^2}\ge f(y);\frac{4z}{3-4z^2}\ge f(z)$.

Để ý rằng nếu ta thực hiện phân tích $3-4x^2=(\sqrt{3}-2x)(\sqrt{3}+2x)$ *thì trong biểu thức xuất hiện* $\sqrt{3}$ *là số vô tỉ rất khó để cân bằng điểm rơi. Như vậy thay vì xét biểu thức* $\frac{x}{3-4x^2}$ *ta đi xét biểu thức* $\left(\frac{x}{3-4x^2}\right)^2=\frac{x^2}{(3-4x^2)^2}$. *Vì bất đẳng thức cần chứng minh có dạng* $\frac{4x}{3-4x^2}\ge f(x)$ *nên ta sẽ đánh giá mẫu theo chiều tăng dần. Do trong đại lượng* $3-4x^2$ *có* $-4x^2$ *nên ta cần nhân thêm vào* $(3-4x^2)^2$ *một lượng* kx^2 *để khi đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy thì biến bị triệt tiêu. Để ý rằng khi* $x=\frac{1}{2}$ *thì ta có* $8x^2=3-4x^2$. *Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được*

$$8x^2(3-4x^2)^2=8x^2.(3-4x^2)(3-4x^2)\le\left(\frac{8x^2+3-4x^2+3-4x^2}{3}\right)^3=8$$

Từ đó $\frac{x^2}{(3-4x^2)^2}=\frac{8x^4}{8x^2(3-4x^2)^2}\ge\frac{8x^4}{8}=x^4$ *nên* $\frac{4x}{3-4x^2}\ge 4x^2$.

• **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có

$$8x^2(3-4x^2)^2=8x^2.(3-4x^2)(3-4x^2)\le\left(\frac{8x^2+3-4x^2+3-4x^2}{3}\right)^3=8$$

Từ đó ta được $\frac{x^2}{(3-4x^2)^2}=\frac{8x^4}{8x^2(3-4x^2)^2}\ge\frac{8x^4}{8}=x^4$ nên $\frac{4x}{3-4x^2}\ge 4x^2$.

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{4y}{3-4y^2}\ge 4y^2;\frac{4z}{3-4z^2}\ge 4z^2$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $P\ge 4(x^2+y^2+z^2)\ge 4(xy+yz+zx)=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.

b) Cho a, b, c là đồ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^{2016}}{b+c-a}+\frac{b^{2016}}{c+a-b}+\frac{c^{2016}}{a+b-c}\ge a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}$$

• ***Phân tích.*** *Với bất đẳng thưc cần chứng minh trên ta không thể sử dụng các đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy hay Bunhiacopxki. Do đó ta nghĩ đến phương pháp biến đổi tương đương.*

Xét hiệu $\frac{a^{2016}}{b+c-a}-a^{2015}+\frac{b^{2016}}{c+a-b}-b^{2015}+\frac{c^{2016}}{a+b-c}-c^{2015}$. *Khi đó ta được*

$$a^{2015}\left(\frac{a}{b+c-a}-1\right)+b^{2015}\left(\frac{b}{c+a-b}-1\right)+c^{2015}\left(\frac{c}{a+b-c}-1\right)$$
$$=a^{2015}\left(\frac{a-b+a-c}{b+c-a}\right)+b^{2015}\left(\frac{b-a+b-c}{c+a-b}\right)+c^{2015}\left(\frac{c-a+c-b}{a+b-c}\right)$$
$$=\frac{a^{2015}(a-b)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}(a-b)}{c+a-b}+\frac{b^{2015}(b-c)}{c+a-b}-\frac{c^{2015}(b-c)}{a+b-c}+\frac{a^{2015}(a-c)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}(a-c)}{a+b-c}$$

Nếu $a\ge b\ge c$ *khi đó ta thấy* $a^{2015}\ge b^{2015}\ge c^{2015}$ *và* $0<b+c-a\le a+c-b\le a+b-c$.

Khi đó ta thấy $\frac{a^{2015}}{b+c-a}\ge\frac{b}{c+a-b};\frac{b^{2015}}{a+c-b}\ge\frac{c^{2015}}{a+b-c};\frac{a^{2015}}{b+c-a}\ge\frac{c^{2015}}{a+b-c}$.

Do đó ta được $(a-b)\left(\frac{a^{2015}}{b+c-a}-\frac{b^2}{c+a-b}\right)\ge 0$. *Hoàn toàn tương tự ta cũng có*

$$(b-c)\left(\frac{b^{2015}}{c+a-b}-\frac{c^{2015}}{a+b-c}\right)\ge 0;(a-c)\left(\frac{a^{2015}}{b+c-a}-\frac{b^{2015}}{a+b-c}\right)\ge 0$$

Đến đây bài toán xem như được chứng minh.

• **Lời giải.** Xét hiệu $\frac{a^{2016}}{b+c-a}-a^{2015}+\frac{b^{2016}}{c+a-b}-b^{2015}+\frac{c^{2016}}{a+b-c}-c^{2015}$ hay ta được

$$a^{2015}\left(\frac{a}{b+c-a}-1\right)+b^{2015}\left(\frac{b}{c+a-b}-1\right)+c^{2015}\left(\frac{c}{a+b-c}-1\right)$$

$$=a^{2015}\left(\frac{a-b+a-c}{b+c-a}\right)+b^{2015}\left(\frac{b-a+b-c}{c+a-b}\right)+c^{2015}\left(\frac{c-a+c-b}{a+b-c}\right)$$
$$=\frac{a^{2015}(a-b)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}(a-b)}{c+a-b}+\frac{b^{2015}(b-c)}{c+a-b}-\frac{c^{2015}(b-c)}{a+b-c}+\frac{a^{2015}(a-c)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}(a-c)}{a+b-c}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c>0$.

Khi đó ta thấy $a^{2015}\ge b^{2015}\ge c^{2015}$ và $0<b+c-a\le a+c-b\le a+b-c$.

Do đó ta có $(a-b)\left(\frac{a^{2015}}{b+c-a}-\frac{b^2}{c+a-b}\right)\ge 0$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$(b-c)\left(\frac{b^{2015}}{c+a-b}-\frac{c^{2015}}{a+b-c}\right)\ge 0;(a-c)\left(\frac{a^{2015}}{b+c-a}-\frac{b^{2015}}{a+b-c}\right)\ge 0$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

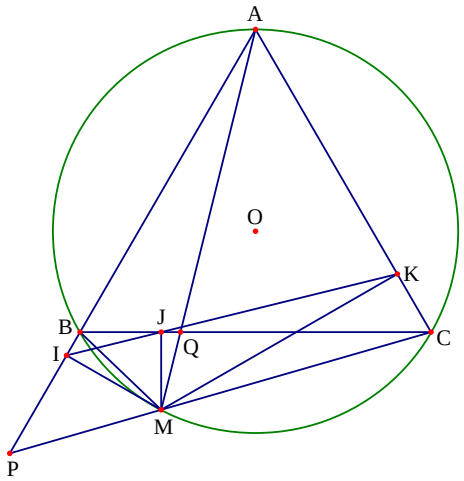
$$\frac{a^{2015}(a-b)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}(a-b)}{c+a-b}+\frac{b^{2015}(b-c)}{c+a-b}-\frac{c^{2015}(b-c)}{a+b-c}+\frac{a^{2015}(a-c)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}(a-c)}{a+b-c}\ge 0$$

Do đó $\frac{a^{2016}}{b+c-a}-a^{2015}+\frac{b^{2016}}{c+a-b}-b^{2015}+\frac{c^{2016}}{a+b-c}-c^{2015}\ge 0$

Từ đó suy ra $\frac{a^{2016}}{b+c-a}+\frac{b^{2016}}{c+a-b}+\frac{c^{2016}}{a+b-c}\ge a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xây ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 4. (6.0 điểm).



a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, M cùng thuộc một đường tròn.

• ***Phân tích.*** *Giả thiết* $CQ.AP=a^2$ *được viết lại thành* $CQ.AP=AC^2$ *hay* $\frac{CP}{AC}=\frac{AC}{AQ}$. *Từ đó ta nghĩ đến hai tam giác ACP và CQA đồng dạng. Điều này được khẳng định do* $\widehat{PAC}=\widehat{QCA}=60^0$. *Để chứng minh tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn ta chỉ cần chỉ ra* $\widehat{MAB}=\widehat{BCM}$ *là được.*

• **Lời giải.** Từ $CQ.AP=a^2$ ta được $CQ.AP=AC^2$ hay $\frac{CP}{AC}=\frac{AC}{AQ}$.

Xét hai tam giác ACP và CQA có $\frac{CP}{AC}=\frac{AC}{AQ}$ và $\widehat{PAC}=\widehat{QCA}=60^0$ nên $\Delta ACP\backsim\Delta CQA$.

Từ đó ta được $\widehat{ACP}=\widehat{AQC}$. Mà ta có $\widehat{ACP}=\widehat{ACB}+\widehat{BCP}=60^0+\widehat{BCP}$

Lại có $\widehat{AQC}=\widehat{ABC}+\widehat{BAM}=60^0+\widehat{BAM}$.

Do đó ta được $\widehat{MAB}=\widehat{BCM}$, suy ra tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn.

b) Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA.

• ***Phân tích.***

+ Xác định vị trí của Q để IK có độ dài lớn nhất.

Ta nhận thấy rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng (Đường thẳng Simson). Do đó ta dự đoán là IK dài nhất khi $IK=BC$, *khi đó điểm M nằm chính giữa cung nhỏ BC của đường tròn (O). Dễ thấy hai tam giác BMC và IMK đồng dạng với nhau. Do đó ta được* $\frac{IK}{BC}=\frac{MI}{MB}$.

Mà ta có $IM \le MB$ *nên ta được* $IK \le BC$. *Từ đó ta có lời giải cho bài toán.*

+ Chứng minh $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ *không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC.*

Để tính được $MI^2 + MJ^2 + MK^2$, *trước hết ta cần tìm được mối lên hệ giữa MI, MJ, MK. Chú ý rằng ta có MI, MJ, MK lần lượt là các đường cao của các tam giác ABM, BCM, ACM. Khi đó ta có*

$$S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.MI; S_{BCM} = \frac{1}{2}BC.MJ; S_{ACM} = \frac{1}{2}MK.AC$$

Quan sát các công thức trên ta thấy có mối liên hệ là $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{BCM} + S_{ABC}$, *mà tam giác ABC đều cạnh a nên ta tính được* $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. *Từ đó ta thấy*

$AB.MI + MK.AC = BC.MJ + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ *hay ta được* $MI + MK = MJ + \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow MI + MK - MJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Để tính được $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ *ta có thể bình phương hai vế biểu thức* $MI + MK - MJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Như vậy ta có $MI^2 + MJ^2 + MK^2 + 2\left(MI.MK - MI.MJ - MJ.MK\right) = \frac{3a^2}{4}$. *Để chứng minh được yêu cầu của bài toán ta cần phải chứng minh được* $MI.MK - MI.MJ - MJ.MK$ *không đổi.*

Trong các bài toán liên quan đến đường thẳng Simson ta thấy có một hệ thức liện hệ giữa MI, NJ, MK đó là $\frac{1}{MI} + \frac{1}{MK} = \frac{1}{MJ}$. *Cần kiểm tra xem hai hệ thức này có mối liên hệ gì không.*

Ta có $\frac{1}{MI} + \frac{1}{MK} = \frac{1}{MJ} \Leftrightarrow MI.MK = MJ\left(MI + MK\right) \Leftrightarrow MI.MK - MJ.MI - MJ.MK = 0$. *Đến đây ta có thể chứng minh được* $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ *không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC.*

- **Lời giải.**

+ Xác định vị trí của Q để IK có độ dài lớn nhất.

Do tứ giác ABMC và AIMI nội tiếp nên $\widehat{BMC} = \widehat{IMK} = 120^0$, suy ra $\widehat{IMB} = \widehat{KMC}$.

Mà hai tứ giác BIMJ và CKJM nội tiếp nên ta lại có $\widehat{BMI} = \widehat{BJI}; \widehat{KMC} = \widehat{KJC}$.

Do đó ta được $\widehat{BJI} = \widehat{KJC}$ nên ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Dễ thấy hai tam giác BMC và IMK đồng dạng với nhau. Do đó ta được $\frac{IK}{BC} = \frac{MI}{MB}$.

Mà ta có $IM \le MB$ nên ta được $IK \le BC$ hay $IK \le a$, dấu bằng xẩy ra khi $MB \perp AB$ hay M nằm chính giữa cung nhỏ BC, khi đó Q là trong điểm cạnh BC.

Vậy IK lớn nhất khi Q là trung điểm của BC.

+ Chứng minh $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC.

Do tứ giác BIMJ nội tiếp nên ta có $\widehat{IMJ} = \widehat{ABC} = 60^0 = \widehat{ACB}$. Lại có $\widehat{MIJ} = \widehat{MBJ} = \widehat{MAC}$

Do đó hai tam giác IMJ và ACQ đồng dạng, do đó ta được $\frac{MJ}{MI}=\frac{CQ}{CA}$. Tương tự ta được $\frac{MJ}{MK}=\frac{BQ}{AB}$.

Từ đó suy ra $\frac{MJ}{MI}+\frac{MJ}{MK}=\frac{CQ}{CA}+\frac{BQ}{AB}=1$ nên ta được $MJ\left(MI+MK\right)=MI.MK$.

Hay $MI.MK-MJ.MI-MJ.MK=0$.

Mặt khác ta lại có $S_{ABM}=\frac{1}{2}AB.MI; S_{BCM}=\frac{1}{2}BC.MJ; S_{ACM}=\frac{1}{2}MK.AC$

Mà $S_{ABM}+S_{ACM}=S_{BCM}+S_{ABC}$ và $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Nên ta có $AB.MI+MK.AC=BC.MJ+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

hay $MI+MK=MJ+\frac{a\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow MI+MK-MJ=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $\left(MI+MK-MJ\right)^2=\frac{3a^2}{4}$

Suy ra $MI^2+MJ^2+MK^2+2\left(MI.MK-MI.MJ-MJ.MK\right)=\frac{3a^2}{4}$.

Mà $MI.MK-MJ.MI-MJ.MK=0$ nên $MI^2+MJ^2+MK^2=\frac{3a^2}{4}$ không đổi.

Vậy $MI^2+MJ^2+MK^2$ không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC.

• ***Nhận xét.*** *Để chứng minh được* $MI^2+MJ^2+MK^2$ *không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC ta đi chứng minh hai bài toán nhỏ sau.*

+ *Bài toán 1.* *Cho tam giác ABC đều có cạnh a nội tiếp đường tròn tâm O.Gọi M là điểm bất kì trê cung nhỏ BC. Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, AC. Khi đó* $MI+MK-MJ$ *không đổi.*

+ *Bài toán 2.* *Cho tam giác ABC đều có cạnh a nội tiếp đường tròn tâm O.Gọi M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC. Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, AC. Khi đó* $\frac{1}{MI}+\frac{1}{MK}=\frac{1}{MJ}$. *Hệ thức trong bài toán 2 còn đúng cho tam giác nhọn ABC bất kì.*

Câu 5. (1.0 điểm).

• ***Phân tích.*** *Bảng có kích tước 10.10 có tất cả 100 ô vuông đơn vị. Theo bài ra thì hai ô chung cạnh hoặc chung đỉnh luôn nguyên tố cùng nhau, như vậy trong hai ô chung cạnh hoặc chung đỉnh thì có một số chẵn và một số lẻ. Trong hình* $2x2$ *có nhiều nhất một số lẻ. Ngoài ra trong các số lẻ đó có nhiều nhất một số là bội của 3 nên có nhiều nhất hai số lẻ không chia hết cho 3. Ta viết rằng trong 100 ô vuông đơn ví có 25 ô vuông* $2x2$ *nên có nhiều nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Mà*

các số lẻ không chia hết cho 3 thỏa mãn bài toán gồm 1; 5; 7. Như vậy theo nguyên lý Dirichlet thì bài toán được chứng minh.

• **Lời giải.** Xét hình vuông cạnh $2x2$, do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn chung cạnh hoặc chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho 3 do đó có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3. Bảng $10x10$ được chia thành 25 hình vuông có cạnh $2x2$ nên có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 0 có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1, 5, 7. Áp dụng nguyên lí Dirichlet ta được một trong ba số trên xuất hiện ít nhất $\left[\frac{50}{3}\right]+1=17$ lần.

ĐỀ SỐ 5 (2014-2015)

Câu 1:

1) Ta có

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=ab+bc+ca$$

$$\Leftrightarrow abc-1+a+b+c-ab-bc-ca=0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)(c-1)=0$$

Vậy có ít nhất một số bằng 1.

2) Ta có:

$$2A=2^{3n+2}+2^{3n}+2=5.8^n+2$$

$$Do\ 8\equiv 1(\bmod 7)\Rightarrow 8^n\equiv 1(\bmod 7)\Rightarrow A\equiv 5+2\equiv 0(\bmod 7)\Rightarrow A\vdots 7$$

Mặt khác ta chứng minh được A > 0 nên A là hợp số.

Câu 2:

1) Do vế phải của phương trình luôn dương nên x > 0.

$$VP=3(x-1)^2+1\geq 1,\quad VT=\sqrt{x.x(3-2x)}\leq\frac{x+x+3-2x}{3}=1$$

Dấu "=" xảy ra khi x = 1 nên phương trình có nghiệm duy nhất x = 1

2) Thay phương trình (2) vào phương trình (1) được:

$$x^3+2xy^3+y(x^2+8y^2)=0\Leftrightarrow (x+2y)(x^2-xy+4y^2)=0\Leftrightarrow x=-2y$$

` Thay x = -2y vào phương trình (2) ta được: $4y^2+8y^2=12$ nên y = ± 1

Vậy hệ có nghiệm (x, y) = (1; - 2) , (-1; 2).

Câu 3:

Ta có: $\sqrt{a^2-ab+b^2}=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}+\frac{3(a-b)^2}{4}}\ge\frac{a+b}{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\le\frac{2}{a+b}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

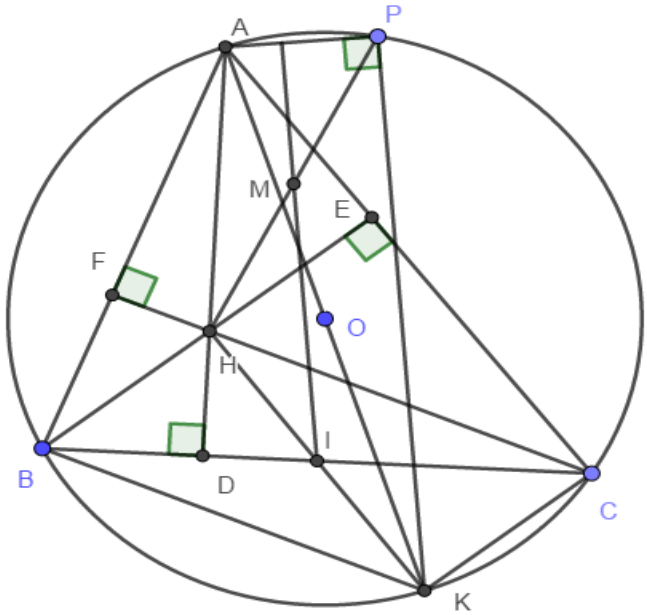
Chứng minh tương tự ta được:

$\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right);\qquad\frac{1}{\sqrt{c^2-ac+a^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$

$\Rightarrow P\le\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]=3$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Câu 4:



a) Chứng minh: $\Delta AEF\sim\Delta ABC\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^2=\cos^2 BAC$

Chứng minh tương tự ta được: $\cos^2 BAC+\cos^2 ACB+\cos^2 BAC=\frac{S_{AEF}+S_{BFD}+S_{CED}}{S_{ABC}}<1$

b) Dựng đường kính AK. Dẫn đến ∠APK = 90° (góc nội tiếp chắn đường kính). Dẫn đến KP vuông góc AP. Sau đó chứng minh tứ giác BHCK là hình bình hành. M là trung điểm của HK. Suy ra MI là đường trung bình của tam giác HPK. Thành ra MI song song với PK. Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5:

a) Từ giả thiết suy ra tồn tại số tự nhiên a sao cho $\frac{p^2-p-2}{2}=a^3$, hay là $p(p-1)=2(a+1)(a^2-a+1)$. Nếu p = 2 thì a = 0 thoả mãn. Nếu p > 2 thì p lẻ. Từ giả thiết suy ra p là ước của (a + 1) hoặc p là ước của (a^2 – a + 1). Giờ xét từng trường hợp.
Nếu p là ước của (a + 1) thì do a < p nên a + 1 = p thay vào phương trình $p(p-1)=2(a+1)(a^2-a+1)$ ta được phương trình $2a^2 - 3a + 2 = 0$, vô nghiệm.
Nếu p là ước của $a^2 - a + 1$ thì ta có thể chọn được số nguyên dương k sao cho $a^2 - a + 1 = kp$. Cũng thay trở lại phương trình $p(p - 1) = 2(a + 1)(a^2 - a + 1)$ cho ta $p - 1 = 2(a + 1)k$, hay $p = 2(a + 1)k + 1$.
Bây giờ thay vào phương trình $a^2 - a + 1 = kp$ cho ta $a^2 - (2k^2 + 1)a + 1 - 2k^2 - k = 0$.
Coi đây là một phương trình bậc hai ẩn a, tính biệt thức cho ta $\Delta = 4k^2 + 12k^2 + 4k - 3$.
Ta cần tìm k sao cho Δ là một số chính phương viết theo k.
Chú ý bất đẳng thức: $(2k^2 + 2)^2 < 4k^4 + 12k^2 + 4k - 3 < (2k^2 + 4)^2$.
Từ đó, $4k^4 + 12k^2 + 4k - 3 = (2k^2 + 3)^2$. Do đó, k = 3 và dẫn đến p = 127.
Vậy p = 2, p = 127.

b) Giả sử năm số đó là a ≥ b ≥ c ≥ d ≥ e ≥ 0.Ta phải có $b+c\le\frac{2}{3}$ vì nếu ngược lại $b+c>\frac{2}{3}$ thì ta có $2a>b+c>\frac{2}{3}$ dẫn đến $a>\frac{1}{3}$. Cái này dẫn đến điều vô lý a + b + c > 1.

Vậy nên $bc\le\frac{1}{4}(b+c)^2=\frac{1}{9}$. Mặt khác 1 = a + b + c + d + e ≥ a + 3d + e ≥ a + 3d ≥ $2\sqrt{a.3d}$..

Thành ra, $ad\le\frac{1}{12}$. Dẫn đến $ae\le ad\le\frac{1}{12}<\frac{1}{9}$. Ta có thể xếp các số a,d,c,b,e trên đường tròn theo thứ tự thuận kim đồng hồ. Ta có $ad<\frac{1}{9}, dc<ad<\frac{1}{9}, bc\le\frac{1}{9}, be\le bc\le\frac{1}{9}, ea\le ad\le\frac{1}{9}$.

Số $\frac{1}{9}$ là số nhỏ nhất có thể.

ĐỀ SỐ 6 (2013-2014)

Câu 1:

1) Từ giả thiết ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=0\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a+b=0;c=2014\\b+c=0;a=2014\\c+a=0;b=2014\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow M=\frac{1}{2014^{2013}}.$$

2) Ta có $2n^2-6n+2=2\left[n(n-3)+1\right]$

Vì n(n – 3) chẵn nên n(n – 3) + 1 = 2k +1 với $k \in N \cup \{-1\}$.

Suy ra $5^{2n^2-6n+2} - 12 = 25^{2k+1} + 1 - 13 \vdots 13$

Vì vậy $5^{2n^2-6n+2} - 12$ nguyên tố hay $5^{2n^2-6n+2} - 12 = 13$

nên n(n – 3) + 1 = 1 , suy ra n = 0 hoặc n = 3.

Câu 2:

1) Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{2}$. Đặt $t - 1 = \sqrt{2x+1}, t \ge 1$ ta có

$x^2 - 2x = 2t; t^2 - 2t = 2x \Rightarrow (x-t)(x+t) = 0 \Leftrightarrow x = t \ \ (do\ x + t > 0)$.

$\Rightarrow x - 1 = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$

2) Từ phương trình thứ nhất suy ra $4z - 5 = (x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow z \ge \frac{5}{4}$.

Từ phương trình thứ hai suy ra $(4z-5)(z-1) \le 0 \Rightarrow 1 \le z \le \frac{5}{4}$.

Do đó $z = \frac{5}{4} \Rightarrow x = y = 0$

Câu 3: Do vai trò của a, b, c như nhau, giả sử $a = max\{a,b,c\}$, , khi đó $2 \le a \le 4$.

Ta có: $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 36}{2}$.

Mặt khác, vì bc ≥ 0 nên

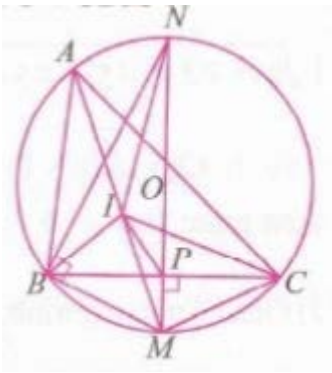
$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b+c)^2 - 2bc \le a^2 + (6-a)^2 = 2a^2 - 12a + 36 = 2\left[(a-2)(a-4) + 10\right] \le 20.$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng 20

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \ge b; a \ge c; bc = 0 \\ (a-2)(a-4) = 0 \\ a + b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b,c) = (4,2,0), (4,0,2)$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 20 chẳng hạn khi a = 4 , b = 2, c = 0.

Câu 4:



a) Ta có

$$\angle IBM = \angle IBC + \angle CBM = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BAC}{2};$$

$$\angle BIM = \angle IAB + \angle IBA = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BAC}{2}.$$

Suy ra $\angle IBM = \angle BIM \Rightarrow \Delta IBM$ cân tại M.

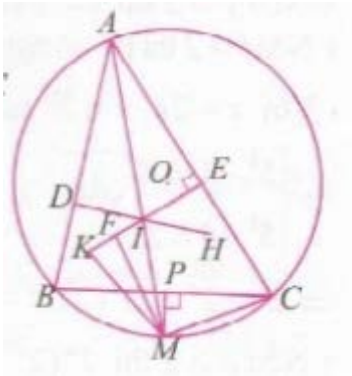
Tương tự, tam giác MIC cân tại M.

b) Ta có $\sin\frac{\angle BAC}{2} = \sin\angle BCM = \frac{MP}{MC} = \frac{MP}{MI}$ (1) (do $MP \perp BC$ và MI = MC);

ΔMBN vuông tại B, có

$$MP.MN = MB^2 = MI^2 \Rightarrow \frac{MP}{MI} = \frac{MI}{MN}(2) \Rightarrow \Delta MPI \sim \Delta MIN\,(c.g.c) \Rightarrow \frac{MI}{MN} = \frac{IP}{IN}(3)$$

c)



Ta có AB + AC = 3BC

$$\Leftrightarrow \frac{AB + AC - BC}{2} = BC \Leftrightarrow AE = BC;$$

$$\Delta IAE \sim \Delta MCP\,(g.g) \Rightarrow \frac{MP}{IE} = \frac{CP}{AE} = \frac{1}{2} \Rightarrow IE = 2MP$$

Gọi F là trung điểm của IK, $\Delta MCP = \Delta MIF\,(c.g.c)$ do

$$MC = MI; \angle PMC = \angle EIA = \angle MIF; MP = IF = \frac{1}{2}IE \Rightarrow \angle IFM = \angle MPC = 90^o$$

Suy ra ΔIMK cân tại M nên MK = MI. Tương tự MH = MI.

Suy ra MB = MC = MH = MK = MI.

Vậy B, C, H, K cùng thuộc một đường tròn.

Câu 5: 1) ta có $5^x - 2^y = 1 \Leftrightarrow 2^y = 5^x - 1$.

Với $x = 2k+1, k \in N$ ta có $2^y = 4\left(5^{2k} + 5^{2k-1} + ... + 5 + 1\right)$.

Nếu y < 0 thì PT vô nghiệm.

Nếu y = 2 thì x = 1 (thỏa mãn).

Nếu y > 2 thì PT vô nghiệm vì VT chia hết cho 8, còn VP không chia hết cho 8.

Với $x = 2k, k \in N$ ta có

$$2^y = \left(5^k - 1\right)\left(5^k + 1\right) \Rightarrow \begin{cases} 5^k - 1 = 2^a \\ 5^k + 1 = 2^b \end{cases}, a, b \in N, 0 \le a < b; a + b = y \Rightarrow 2^b - 2^a = 2^a\left(2^{b-a} - 1\right) \vdots 4 \text{ vô lý}$$

Nếu a ≥ 2 thì $2^a\left(2^{b-a} - 1\right) \vdots 4$, vô lý

Nếu a = 1 ; a = 0 thì $5^k = 3; 5^k = 2$, vô lý

Vậy (x; y) = (1; 2).

2) Nhận xét: trong nhiều trường hợp, $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ suy biến không còn là lục giác nên sau đây ta thống nhất gọi là đa giác $M_1....M_6$.

Gọi O là tâm của lục giác đều ABCDEF (kí hiệu là $\mathscr{S}$). Nếu $P \equiv O$ thì đa giác $M_1..M_6 \equiv \mathscr{S}$ ta có đpcm.

Nếu P thuộc một trong ba đường chéo lớn của $\mathscr{S}$, P ≠ O thì P thuộc một trong sáu đoạn OA, OB, OC, OD, OE, OF. Giả sử $P \in OD$ khi đó hai tia AP, DP lần lượt đi qua đỉnh D, đỉnh A của $\mathscr{S}$ và ta có $M_1 \equiv D, M_4 \equiv A$. Còn lại 4 tia, cắt nhiều nhất 4 cạnh của $\mathscr{S}$. Như vậy tồn tại ít nhất hai cạnh AB, AF của $\mathscr{S}$ không chứa các điểm $M_1,..,M_6$. . Xét tam giác có một cạnh là AB và một cạnh là M_4M_i của đa giác $M_1....M_6$ gần AB nhất $\left(M_4 \equiv A\right)$, ta luôn có $\angle M_4BM_i > 90^o \Rightarrow M_4M_i > AB = 1$.

Nếu P không thuộc ba đường chéo lớn của $\mathscr{S}$ thì P nằm trong một trong sáu tam giác đều của $\mathscr{S}$ mà ba đường chéo lớn chia ra. Giả sử P nằm trong ΔODE . Như vậy, tồn tại ít nhất cạnh AB của $\mathscr{S}$ không chứa các điểm $M_1,..,M_6$. Khi đó M_4M_5 luôn là một cạnh của đa giác $M_1....M_6$ và ABM_5M_4 là tứ giác luôn có $\angle ABM_5 > 90^o; \angle BAM_4 > 90^o \Rightarrow M_4M_5 > AB = 1$.

ĐỀ SỐ 7 (2012-2013)

Bài 1:

1) Đặt $f(x) = 4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6 = \left(x^2 - 2x - 3\right)q(x) = (x+1)(x-3)q(x)$

Từ đó $\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 5b = 9 \\ 18a - 15b = 91 \end{cases}$

2) Nhận xét $\begin{cases} a + b = 8 \\ ab = 11 \end{cases}$ nên a, b là nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 11 = 0$

Ta có:

$$P = \left(a^{2013} - 8a^{2012} + 11a^{2011}\right) + \left(b^{2013} - 8b^{2012} + 11b^{2011}\right) = \left(a^2 - 8a + 11\right)a^{2011} + \left(b^2 - 8b + 11\right)b^{2011} = 0$$

Bài 2:

1) Hệ $\begin{cases} 6x^2 - y^2 - xy + 5x + 5y - 6 = 0 & (1) \\ 20x^2 - y^2 - 28x + 9 = 0 & (2) \end{cases}$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow (2x - y + 3)(3x + y - 2) = 0$

Rút y theo x thế vào phương trình (2) ta có thể giải được hệ.

2) Nhân 2 vào hai vế ta được

$(x+4y)^2 + (4y-7)^2 + (x-1)^2 + 10x^2 - 14 = 0 \Rightarrow x^2 \le 1 \Rightarrow x \in \{-1;0;1\}$ $(do\ x \in Z)$

Thay các x = - 1; 0; 1 vào phương trình tìm y

Bài 4:

a) Sử dụng dấu hiệu trong chứng minh tứ giác nội tiếp ta có IE. IF = IB.IC = IM.IA nên tứ giác AMFE nội tiếp

Mặt khác tứ giác AFHE nội tiếp

Vậy A, M, F, H, E cùng nằm trên đường tròn.

b) Vì tứ giác AMHE nội tiếp nên HM vuông góc với AM tại M

Sử dụng bổ đề nếu HN kéo dài cắt (O) tại D thì A,O, D thẳng hàng, tức là H, M, N thẳng hàng.

c) Sử dụng định lý Ptoleme cho tứ giác AMBC.

Bài 5:

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{2}{b}; z = \frac{3}{c} \Rightarrow x + y + z = 3$

Khi đó ta cần chứng minh: $\frac{z^3}{x^2+z^2} + \frac{x^3}{y^2+x^2} + \frac{y^3}{z^2+y^2} \ge \frac{3}{2}$

Ta có: $\frac{z^3}{x^2+z^2} = z - \frac{zx^2}{x^2+z^2} \ge z - \frac{zx^2}{2zx} = z - \frac{x}{2}$

Chứng minh tương tự và cộng lại ta được:

$$\frac{z^3}{x^2+z^2} + \frac{x^3}{y^2+x^2} + \frac{y^3}{z^2+y^2} \ge (x+y+z) - \frac{1}{2}(x+y+z) = \frac{x+y+z}{2} = \frac{3}{2}\ (dpcm)$$

Bài 5:

Kẻ đường kính DE bất kì $(DA_1 + DA_2 + ... + DA_{2013}) + (EA_1 + EA_2 + ... + EA_{2013}) \ge 4026$

Đặt $P = DA_1 + DA_2 + ... + DA_{2013}, S = EA_1 + EA_2 + ... + EA_{2013}$

Nếu P ≥ 2013 thì D là điểm M cần tìm

Nếu P < 2013 thì E là điểm cần tìm.

ĐỀ SỐ 8 (2011-2012)

Bài 1:

1) Ta có:

$$n^5 - n = n\left(n^2+1\right)\left(n-1\right)\left(n+1\right) = n\left(n^2-4+5\right)\left(n-1\right)\left(n+1\right)$$
$$= \left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right) + 5n\left(n-1\right)\left(n+1\right).$$

Do $n \in N^*$ nên $\left(n^5-n\right) \vdots 30$. Từ đó suy ra $A = a^{2017}\left(a^5-a\right) + b^{2007}\left(b^5-b\right) + c^{2007}\left(c^5-c\right) \vdots 30.$

2) Ta có: $x = \sqrt[3]{7+\frac{7}{2\sqrt{2}}} + \sqrt[3]{7-\frac{7}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow x^3 = 14 + 3x\sqrt[3]{7^2 - \frac{7^2}{8}} \Rightarrow 2x^3 - 21x - 28 = 0.$

Do đó $f\left(x\right) = \left(2x^3 - 21x - 29\right)^{2012} = \left(-1\right)^{2012} = 1.$

Bài 2:

1) Ta có:

$$\sqrt{x^2+5} + 3x = \sqrt{x^2+12} + 5$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5} - 3 + 3x - 6 - \sqrt{x^2+12} + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3} + 3\left(x-2\right) - \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^5+5}+3} + 3 - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}\right) = 0.$$

Từ đặc điểm của PT suy ra $3x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$; do đó $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} > \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}$;vì vậy biểu thức trong ngoặc luôn dương. Suy ra $x - 2 \Leftrightarrow x = 2$

2) Viết phương trình thứ nhất của hệ thành: $x^2 + \left(y+1\right)x - y - 2y^2 = 0$

Có $\Delta = \left(y+1\right)^2 + 4\left(y+2y^2\right) = 9y^2 - 6y + 1 = \left(3y-1\right)^2$.

Do đó x = y hoặc x = - 2y – 1.

Với x = y thay vào PT thứ hai tìm được $2x = 6 \Leftrightarrow x = 3.$

Với x = -2y – 1, thay vào PT thứ hai tìm được $y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1, y = 2.$

Vậy hệ có ba nghiệm (x, y) = (3; 3) , (-3; 1), (-5; 2).

Bài 3:

Viết PT thành dạng: (2x – 3y + 3)(x – y – 2) = -2.

Xảy ra 4 trường hợp

2x – 3y + 3	2	-1	1	-2
x – y - 2	-1	2	-2	1

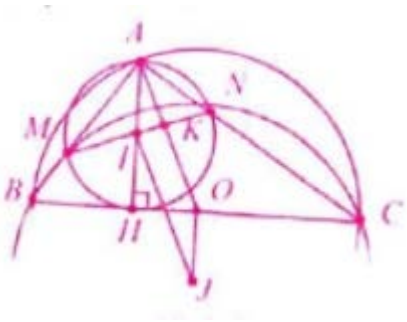
Vậy có bốn cặp số (x, y) thỏa mãn là (4; 3), (16; 12), (2;2), (14; 11).

Bài 4:

1) Gọi $OA \cap MN = K$. Ta có $\widehat{OAC} = \widehat{ACB}$

(vì OA = OC); $\widehat{AMN} = \widehat{ABC} = \left(= \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{MC} \right)$

Nên $\widehat{OAC} + \widehat{ANM} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{AKN} = 90^\circ$, tức là $OA \perp MN$.



2) Chứng minh tứ giác BMNC nội tiếp.

Gọi , gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNC thì JI // AO (cùng vuong góc với MN); JO // AH (cùng vuông góc với BC) nên tứ giác AIJIO là hình bình hành, suy ra: $OJ = AI = \frac{AH}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{cm}); OB = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}(\text{cm})$.

Do đó $BJ = \sqrt{OB^2 + OJ^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}(\text{cm})$.

Bài 5:

1) Đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{1}{\frac{S}{a}+\frac{2S}{b}} + \frac{1}{\frac{S}{b}+\frac{2S}{c}} + \frac{1}{\frac{S}{c}+\frac{2S}{a}} = \frac{1}{\frac{3S}{a+b+c}}$.

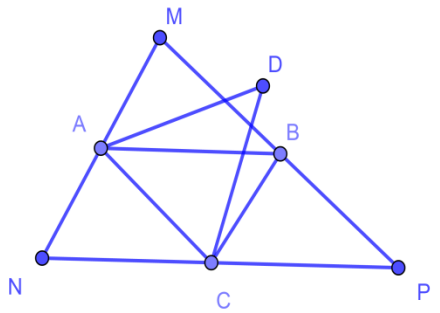
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được: $\frac{S}{a} + \frac{2S}{b} = S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{9S}{a+2b}$.

Tương tự: $\frac{S}{b} + \frac{2S}{c} \geq \frac{9S}{b+2c}; \frac{S}{c} + \frac{2S}{a} \geq \frac{9S}{c+2a}$. Do đó:

$$\frac{1}{\frac{S}{a}+\frac{2S}{b}}+\frac{1}{\frac{S}{b}+\frac{2S}{c}}+\frac{1}{\frac{S}{c}+\frac{2S}{a}}\le\frac{a+b+c}{3S}=\frac{1}{\frac{3S}{a+b+c}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c hay tam giác ABC đều

2)



Trong 8045 điểm luôn tìm được 3 điểm là đỉnh của tam giác có diện tích lớn nhất, giả sử đó là A, B, C với $S_{ABC}\le 1$. Dựng các đường thẳng đi qua A và song song với BC, qua B và song song với AC, qua C và song song với AB, chúng đôi một cắt nhau tại M, N, P. Khi đó $S_{MNP}=4S_{ABC}\le 4.$.

Ta sẽ chứng minh rằng 8045 điểm đã cho nằm trong hoặc trên cạnh tam giác MNP. Thật vậy, giả sử $\exists D\notin \Delta MNP$ (chẳng hạn D và B cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ chứa AC) thì $S_{DAC}>S_{ABC}$ (mâu thuẫn với cách chọn tam giác ABC). Tam giác MNP được chia thành 4 tam giác nhỏ bằng nhau ANC, AMB, ABC, BCP. Ta có 8045 = 4.2011+ 1. Theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại ít nhất 2011 + 1 = 2012 điểm phải nằm trong hoặc trên cạnh của một tam giác nhỏ có diện tích không lớn hơn 1.

ĐỀ SỐ 9 (2010-2011)

Bài 1:

Rút gọn A

* Phân tích $4x^3 - 16x^2 + 21x - 9 = (2x - 3)^2(x - 1)$
* Điều kiện: x > 1
* A=|2x-3|
* $A=\begin{cases}2x-3 & x\le\frac{3}{2}\\ 3-2x & 1<x<\frac{3}{2}\end{cases}$

Bài 2:

1) **Giải phương trình …**

* Phân tích $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x^2 + x + 1)$
* Điều kiện: $x \geq -2$
* Đặt $x + 2 = a$, $x^2 + x + 1 = b$ đưa về $2(a + b) = 5\sqrt{ab}$
* Giải được $a = 4b$, $b = 4a$
* $a = 4b \Leftrightarrow x + 2 = 4(x^2 + x + 1)$ phương trình vô nghiệm
* $b = 4a \Leftrightarrow x^2 - 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{3+\sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{37}}{2}$
* So sánh với điều kiện và kết luận

2) **Cho các số thực …**

* Đưa về phương trình: $8y^2 - 8yx + 4x^2 - 11x + 14 = 0$
* $\Delta' y = -16x^2 + 88x - 112 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 14 \leq 0$
* Giải được $2 \leq 3 \leq 3,5$
* Với $x = 2 \Rightarrow y = 1$; $x = 3,5 \Rightarrow y = 1,75$
* Kết luận: (2;1), (3,5;1,75)

Bài 3:

1) **Tìm 7 số …**

* Goi 7 số nguyên dương phải tìm là $x_1, x_2, \ldots, x_7$;

$x_1^2.x_2^2...x_7^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + ...x_7^2)$

* Giả sử $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_7 \geq 1$ có $x_1^2.x_2^2...x_7^2 \leq 2.7\,x_1^2 = 14\,x_1^2$

$\Rightarrow x_2^2...x_7^2 \leq 14$

* $x_2 \ldots x_7 \leq \sqrt{14} < 4 = 2^2 \Rightarrow x_2 = \ldots = x_7 = 1$

$\Rightarrow x_1^2.x_2^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + 5)$

* Đặt $x_1^2 = a$, $x_2^2 = b$ với a, b là các số nguyên dương chính phương

$ab = 2a + 2b + 10 \Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 14.1 = 7.2$

* Trường hợp 1: $\begin{cases} a - 2 = 14 \\ b - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow b = 3$ không phải lá số chính phương
* Trường hợp 2: $\begin{cases} a - 2 = 7 \\ b - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ và kết luận

2) **Cho các số …**

* $B = 16x^2y^2 + 12x^3 + 12y^3 + 34xy$
* $B = 16x^2y^2 + 12(x + y)^3 - 2xy = \ldots = 16(xy - \frac{1}{16})^2 + \frac{191}{16}$
* $B \geq \frac{191}{16}$, B nhỏ nhất $= \frac{191}{16} \Leftrightarrow xy = \frac{1}{16}$. Giải được:

$x = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$, $y = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ hoặc $x = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$, $y = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

* Lại có $0 \le 4xy \le (x+y)^2 = 1 \Rightarrow 0 \le xy \le \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{16} \le xy - \frac{1}{16} \le \frac{3}{16}$

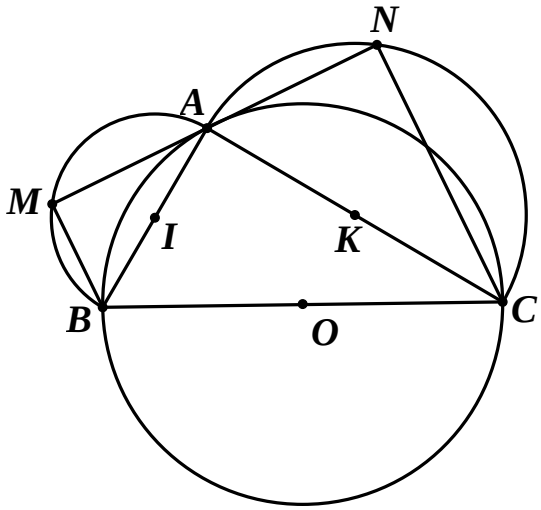
nên $0 \le \left| xy - \frac{1}{16} \right| \le \frac{3}{16}$

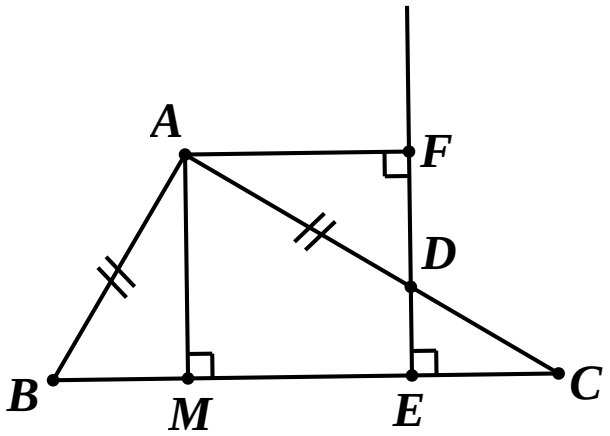
* $B = 16(xy - \frac{1}{16})^2 + \frac{191}{16} \le 16.(\frac{3}{16})^2 + \frac{191}{16} = \frac{25}{52}$.

Vậy B lớn nhất $= \frac{25}{52} \Leftrightarrow (x+y) = 1$ và $xy = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

* Kết luận

Bài 4:





1) Tính các góc…

* Chứng minh được $\widehat{BAC} = 90^0$
* Chứng minh được ΔAMB và ΔCAN đồng dạng
* Suy ra $\frac{1}{3} = \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta CNA}} = (\frac{AB}{AC})^2$
* $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = tg30^0 = tg\ \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ACB} = 30^0$
* Vậy $\widehat{ABC} = 60^0$ và kết luận.

2) So sánh …

* Kẻ AH ⊥ BC có AFEH là hình chữ nhật
* ΔABD vuông cân ⇒ $\widehat{ADB} = 45^0$
* Tứ giác ADEB nội tiếp ⇒ $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 45^0$
* Do đó ΔAHE vuông cân ⇒ AH=HE=AF
* ΔABC vuông: $\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{2}{AC^2} < \frac{1}{AF^2} < \frac{2}{AB^2}$
* Từ $\frac{2}{AC^2} < \frac{1}{AF^2} \Rightarrow \frac{AF}{AC} < \cos\widehat{AEB} < \frac{AF}{AB} = \cos 45^0 = \cos\widehat{AEB}$

* Từ $\frac{1}{AF^2} \langle \frac{2}{AB^2} \Rightarrow \frac{AF}{AB} \rangle \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0 = \cos \widehat{AEB}$

* Kết luận $\frac{AF}{AC} \langle \cos \widehat{AEB} \langle \frac{AF}{AB}$

Bài 5:

1) Ai thắng …

* Người thứ nhất lấy 3 viên bi còn 308 viên bi là bội số của 4
* Người thứ hai lấy 1, 2 hoặc 3 viên bi
* Nười thứ nhất lấy 3, 2 hoặc 1 viên số còn lại là bội của 4
* Cứ tiếp tục như vậy thì người lấy cuối cùng phải là người thứ nhất

2) Với n viên bi

* Nếu n không phải là bội số của 4, với cách làm như trên thì người thứ nhất thắng
* Nếu n là bội của 4 thì người thứ hai thắng.

ĐỀ SỐ 10 (2009-2010)

GV: Thái Tuấn (THCS Thạch Đà – Mê Linh – Hà Nội)

Câu 1:

Tính $x = \frac{3\left(2+\sqrt{5}\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+3-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)^3\left(17\sqrt{5}-38\right)} = \sqrt[3]{\left(17\sqrt{5}+38\right)\left(17\sqrt{5}-38\right)} = 1 \Rightarrow A = 1$

Câu 2:

a) x = 0 không là nghiệm của phương trình.

Xét x ≠ 0 chia hai vế phương trình cho x^2 ta được:

$$\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{2}{x}\right)-2=0 \Leftrightarrow t^2+3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-2=0 \\ x^2+2x-2=0 \end{array}\right.$$

Giải hệ thống 2 phương trình thu được 4 nghiệm của PT (1) như sau:

$$\left\{1;-2;-1+\sqrt{3};-1-\sqrt{3}\right\}$$

b) Dễ thấy (x, y) là nghiệm thì (y, x) cũng là nghiệm của hệ.

Để hệ có nghiệm duy nhất thì x = y.

Từ hệ suy ra $a \in \left\{-2;2;\frac{1}{4}\right\} \Rightarrow a \in \left\{2;\frac{1}{4}\right\}$ thỏa mãn (sau khi thử lại).

Câu 3:

a) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{(x+1)^2\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-x+1\right)} \le 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=-1.$$

b) Ta có bất đẳng thức : $x^3+y^3 \ge xy(x+y) \quad \forall x,y>0 \quad (*)$

Thật vậy bất đẳng thức (*) tương đương với:

$$x^3+y^3-xy(x+y)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-2xy+y^2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng các phép biến đổi là tương đương nên bất đẳng thức (*) được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi x = y.

Áp dụng (*) ta được:

$$x^3+y^3+1=x^3+y^3+xyz\ge xy(x+y)+xyz=xy(x+y+z)\Rightarrow \frac{1}{x^3+y^3+1}\le \frac{1}{xy(x+y+z)}$$

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{1}{y^3+z^3+1}\le \frac{1}{yz(x+y+z)}$; $\frac{1}{z^3+x^3+1}\le \frac{1}{zx(x+y+z)}$

Cộng theo vế các bất thức trên ta được:

$$B=\frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{z^3+x^3+1}\le \frac{1}{xy(x+y+z)}+\frac{1}{yz(x+y+z)}+\frac{1}{zx(x+y+z)}$$
$$=\frac{x+y+z}{xyz(x+y+z)}=\frac{1}{xyz}=1$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là 1 khi x = y = z = 1.

Câu 4: (Các bạn tự vẽ hình)

a) Nhiều cách làm. Xin giới thiệu một cách dễ nghĩ đến.
Kẻ DP′ vuông góc BC. Suy ra P′, M, N thẳng hàng (Đường thẳng Sim son). Dẫn tới P và P′ trùng nhau (do MN và BC chỉ có mọt giao điểm duy nhất).

b) Dễ chứng minh được:
$OI^2 = R^2 - 2Rr$ (Hệ thức Ơ – le). Từ đó suy ra kết quả.

Câu 5:

C thuộc Z thì $y^2C=\frac{x^3y^2+xy^2}{xy-1}=\frac{(x^3y^2-x^2y)+(x^2y-x)+(xy^2-y)+(x+y)}{xy-1}$

$$=\frac{(x^2y+x+y)(xy-1)+(x+y)}{xy-1}=x^2y+x+y+\frac{x+y}{xy-1}\in Z$$
$$\Rightarrow x+y\ge -1+xy\Leftrightarrow (x-1)(y-1)\le 2$$

Với x = 1 thì y = 3.

Với x > 1 thì $y-1\le 2\Rightarrow 1\le y\le 3\Rightarrow y\in\{1;2;3\}$

Nếu y = 1 thì $\frac{x+y}{xy-1}=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}\in Z\Rightarrow x=3;2\ (do\ x>1)$

Nếu y = 2 thì $\frac{x+y}{xy-1}=\frac{x+2}{2x-1}=\frac{1}{2}+\frac{5}{4x-2}\in Z$ từ đây tìm được x

Nếu y = 3 thì $\frac{x+y}{xy-1}=\frac{x+3}{3x-1}=\frac{1}{3}+\frac{5}{4x-2}\in Z$ từ đây tìm được x